Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30min 07-07-2010

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

---

1. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e seja B um acontecimento de $\mathcal{A}$ tal que $P(B) > 0$.

a) Prove que a função P_B definida por

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

é uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

b) Considere n acontecimentos de $\mathcal{A}$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Em que condições são estes acontecimentos mutuamente independentes relativamente à probabilidade P_B?

c) Nas condições referidas na alínea anterior, prove que $\overline{A}_1$, A_2 e A_3 são mutuamente independentes relativamente à probabilidade P_B.

2. Num armazém de produtos farmacêuticos existe uma secção destinada a medicamentos contendo como componente o fármaco ácido acetilsalicílico (AAS). Estes medicamentos estão embalados em caixas segundo a dosagem de AAS ($500\,mg$ ou $1000\,mg$) e o tipo (genérico ou de marca). Sabe-se que 50% dos medicamentos são genéricos e que, destes, 60% têm dosagem de $1000\,mg$. Além disso, 60% dos medicamentos com dosagem de $1000\,mg$ são genéricos.

a) Determine a percentagem de medicamentos armazenados com dosagem de $500\,mg$.

b) Verifique se a dosagem e o tipo dos medicamentos são características independentes.

c) No laboratório onde se fabrica um determinado medicamento genérico, uma máquina empacota o medicamento de forma defeituosa em 1.5% das embalagens que produz. As embalagens produzidas são sujeitas a um controlo final de qualidade.

Determine o número mínimo de embalagens que devem ser observadas pelo controlo de qualidade, aleatoriamente e de forma independente, para que, com uma probabilidade não inferior a 0.9, seja detectada pelo menos uma embalagem com defeito de empacotamento.

3. Seja (X, Y) um vector aleatório real bidimensional, absolutamente contínuo de densidade f.

a) Indique condições sobre f que assegurem a existência da esperança matemática de (X, Y) e defina-a nesse caso.

b) Prove que a variável aleatória real (v.a.r.) X é absolutamente contínua, apresentando uma versão da sua densidade.

v.p.f.

4. Seja X uma v.a.r. definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, absolutamente contínua, com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Obtenha a função de distribuição de X e calcule a correspondente mediana.

b) Determine a lei da v.a.r. $U = |X|$.

c) Mostre que U não admite esperança matemática e tire conclusões sobre os momentos de X.

d) Considere uma v.a.r. Y, também definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, independente de X e seguindo a lei uniforme no intervalo $]0,1[$.

(i) Caracterize a lei de probabilidade do vector aleatório real (X, Y).

(ii) Calcule $P(0 < Y < X < 1)$.

(iii) Que pode dizer acerca da covariância entre X e Y?

5. Um psiquiatra receita aos seus pacientes que sofrem de insónia um e um só de dois medicamentos, A e B (de acordo com determinadas características dos doentes). Sejam X e Y as v.a.r. que indicam o tempo de sono (em horas) proporcionado pelos medicamentos A e B, respectivamente. Suponha que X e Y são independentes e que $X \sim N(7,1)$ e $Y \sim N(6, 0.5)$.

Qual é a probabilidade de que um doente tratado com o medicamento A durma mais do que um doente tratado com o medicamento B?

Cotação:
1. 3.5
2. 4.5
3. 3.0
4. 7.5
5. 1.5