Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30min 23-07-2010

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

---

1. Considere um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos de $\mathcal{A}$ tais que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} \subseteq A_n.$$

a) Prove que existe o acontecimento $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ e identifique-o.

b) Suponha que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(A_n) = p^n, \quad \text{com } p \in]0,1[.$$

(i) Determine a probabilidade de que ocorra pelo menos um dos acontecimentos A_n, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Qual é a probabilidade do acontecimento $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$?

(iii) Verifique que é quase certa a realização de, quando muito, um número finito de acontecimentos A_n, $n \in \mathbb{N}$.

2. Numa determinada região existem três farmácias, A, B e C, cujos utentes são fiéis à sua farmácia (isto é, cada utente frequenta uma e uma só destas farmácias). Sabe-se que, dos utentes das três farmácias, 40% são clientes da farmácia A e 50% são clientes da farmácia B. Além disso, metade dos clientes da farmácia A são homens, metade das mulheres são clientes da farmácia B e a farmácia C, especializada em produtos para mulheres, só tem clientes do sexo feminino.

a) Determine a percentagem de utentes do sexo feminino.

b) Calcule a percentagem de homens entre os utentes da farmácia B.

c) O número de clientes que chegam à farmácia B num determinado período de tempo é uma variável aleatória real (v.a.r.) com distribuição de Poisson de parâmetro 15. Qual o número mínimo de clientes que, com probabilidade quando muito igual a 0.95, chegam à farmácia B durante tal período de tempo?

3. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua cuja densidade é uma função par.

a) Prove que a lei de X é simétrica relativamente à origem.

b) Sendo F a função de distribuição de X, mostre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(-x) = 1 - F(x).$$

v.p.f.

4. Considere o vector aleatório real (X, Y), absolutamente contínuo, cuja função densidade é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{8}, & 0 < x < 2, \quad 0 < y \leq x^2 \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

Nestas condições a função densidade da v.a.r. X é dada por

$$f_X(x) = \frac{3}{8} x^2 \, \mathbb{I}_{]0,2[}(x).$$

a) Obtenha a função de distribuição de X e determine o correspondente percentil 95.

b) Serão as v.a.r. X e Y identicamente distribuídas?

c) Que pode concluir quanto à independência entre X e Y?

d) Determine o valor médio da v.a.r. $W = XY$.

e) Calcule o valor da função de distribuição da v.a.r. $Z = \min(X, Y)$ no ponto 1.

5. Considere n v.a.r. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, independentes e identicamente distribuídas com a lei de Bernoulli de parâmetro p, $p \in]0, 1[$. Obtenha a lei de probabilidade da v.a.r. $T = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ e tire conclusões sobre o correspondente valor médio.