Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Probabilidades

Duração: 1h 30min 27-05-2010

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

---

1. Numa fábrica de peças de vidro, o peso, em gramas, de determinado tipo de peças decorativas é bem representado por uma variável aleatória real (v.a.r.) X com distribuição normal $N(200, 10)$. Considera-se que uma peça de tal tipo não está em conformidade com as especificações relativamente ao peso se este é inferior a $180.4\ gr$ ou superior a $219.6\,gr$.

a) Verifique que 95% das peças decorativas do referido tipo são fabricadas em conformidade com as especificações relativamente ao peso.

b) No processo de controlo de qualidade que ocorre à saída da cadeia de produção de tais peças decorativas, estas podem ser rejeitadas por não estarem em conformidade com as especificações relativas ao peso ou por apresentarem bolhas de ar. Estes dois tipos de defeitos ocorrem independentemente um do outro e sabe-se que 2.5% das peças decorativas em causa apresentam bolhas de ar.

(i) Determine a probabilidade de que uma qualquer daquelas peças decorativas seja rejeitada à saída da cadeia de produção.

(ii) Calcule a percentagem de peças decorativas que, no conjunto das que são rejeitadas à saída da cadeia de produção, apresentam um só dos dois defeitos referidos.

(iii) Um comerciante pretende comprar à fábrica 100 daquelas peças decorativas, com a condição de as devolver se, ao inspeccionar 10 peças escolhidas ao acaso de entre as 100 que receber, encontrar alguma com bolhas de ar. Se houver 2 peças com bolhas de ar na encomenda do comerciante, qual é a probabilidade deste vir a fazer a sua devolução?

2. Sejam X e Y duas v.a.r. independentes e identicamente distribuídas com uma lei absolutamente contínua de densidade f. Supondo que X admite valor médio, m, prove que a v.a.r. XY admite valor médio e determine-o.

3. Considere o vector aleatório real (X, Y), absolutamente contínuo, cuja densidade é dada por

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y}{x^2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Nestas condições, tem-se $E(X) = \frac{1}{2}$ e $E(Y) = \frac{1}{3}$.

a) Conclua que X é uma v.a.r. absolutamente contínua seguindo a lei uniforme no intervalo $]0, 1[$.

b) Obtenha a função de distribuição de X e calcule a correspondente mediana.

c) Determine $E(XY)$. Que pode concluir sobre a independência entre X e Y?

d) Seja Q uma lei de probabilidade sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ com função de distribuição definida por $F(x) = \frac{x+1}{2}\mathbb{1}_{[0,1[}(x) + \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$. Mostre que $Q = \frac{1}{2}P_X + \frac{1}{2}\delta_0$, onde P_X e δ_0 representam, respectivamente, a lei de X e a lei de Dirac no ponto zero.