Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Teste de Probabilidades

Duração: 1 h 11-03-2010

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

---

1. Seja P uma probabilidade definida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, onde $\mathcal{B}$ é a tribo de Borel de $\mathbb{R}$.

Considere a sucessão $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{B}$ definida por $A_n =]-n, n[$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Mostre que a sucessão $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e determine o seu limite.

b) Calcule a probabilidade da ocorrência de uma infinidade de acontecimentos $\overline{A}_n$.

c) Supondo agora que $P(A_n) = 1 - e^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, determine a probabilidade de se realizarem todos os acontecimentos A_n, $n \in \mathbb{N}$.

2. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e sejam $A, B, C \in \mathcal{A}$, com A independente de C e B independente de C. Suponha que $P(C) > 0$ e seja P_C a probabilidade condicionada por C.

a) Mostre que, se A e B são independentes no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P_C)$, então $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$.

b) Admitindo válidas todas as hipóteses anteriormente indicadas, apresente uma condição sob a qual os acontecimentos A, B e C sejam independentes em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

3. Na sequência de um inquérito feito em determinada região com o objectivo de avaliar os níveis de audiência das duas estações de rádio locais, A e B, concluiu-se que 60% dos habitantes daquela região ouvem alguma das duas estações. Além disso, a estação B é ouvida por 25% dos habitantes e, dos que ouvem a estação B, 20% ouvem a estação A.

a) Qual a percentagem de habitantes daquela região que ouvem a estação A?

b) Entre aqueles que não ouvem a estação B, qual a percentagem dos que ouvem a estação A?