Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Teste de Probabilidades

Duração: 1 h 29-04-2010

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

---

1. Seja X uma variável aleatória (v.a.r.) absolutamente contínua com função de distribuição F_X dada por

$$F_X(x) = 1 - e^{-e^x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Mostre que a v.a.r. $Y = e^X$ segue a lei exponencial de parâmetro 1.

b) Que pode concluir acerca do valor médio de Y?

2. Seja X uma v.a.r. definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e admitindo momento de ordem 4, tendo-se $E(X^2) = 1$ e $E(X^4) = 3$.

a) Mostre que

$$\forall \alpha > 0, \quad P(|X^2 - 1| \leq \alpha) \geq 1 - \frac{2}{\alpha^2}.$$

b) Calcule o desvio padrão da v.a.r. $Z = 3 - 4X^2$.

3. Determine o 1º quartil e o percentil 90 da lei de probabilidade discreta de suporte $S = \{1, 2, 3\}$ e função de probabilidade f tal que $f(1) = f(3) = 0.25$ e $f(2) = 0.5$.

Nota: A lei exponencial de parâmetro λ, $\lambda > 0$, é a lei absolutamente contínua de densidade

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$
