Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30m — 01 - 07 - 2011

Observação: Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

I

1. Seja X uma variável aleatória real (v.a.r.) definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de lei difusa, simétrica em relação à origem e com função de distribuição F.

a) Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = 1 - F(-x)$ e conclua que as v.a.r. X e $(-X)$ seguem a mesma lei.

b) Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a.r. independentes e identicamente distribuídas com X. Prove que

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\}, \forall (a_1, ..., a_k) \in \mathbb{R}^k,\ P\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{|X_i| \geq a_i\}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{k} (2F(a_i) - 1).$$

2. Um estudo estatístico sobre a distribuição dos tipos de sangue, A, B, O e AB, da população de uma certa região, permitiu concluir que 40% dos indivíduos têm sangue do tipo A e 45% têm sangue do tipo O. Dos restantes, 1/3 tem sangue do tipo AB. Uma análise clínica muito usada, mas não totalmente fiável, indica como sendo do tipo A apenas 90% dos indivíduos que têm, de facto, sangue do tipo A. Sabe-se ainda que tal análise indica como sendo do tipo A, 4% dos que têm sangue do tipo O e 3% dos que têm sangue do tipo B. Além disso, 2% dos casos em que a análise indica "tipo A"correspondem a indivíduos com sangue do tipo AB. Considere um qualquer indivíduo dessa população a quem foi efectuada tal análise.

a) Sabendo que o resultado da análise indicou "tipo A", determine a probabilidade desse indivíduo ter de facto sangue do tipo A.

b) Qual a probabilidade de que um indivíduo da população identificado por essa análise como do tipo A tenha sangue do tipo B?

c) Determine o número mínimo de indivíduos com sangue do tipo A que, com uma probabilidade de 83.28%, podemos encontrar entre 10 indivíduos seleccionados ao acaso e de modo independente na referida população.

II

1. Seja (X, Y) um vector aleatório real bidimensional de função de distribuição

$$G(x, y) = F(x)F(y),$$

onde F é uma função de distribuição sobre $\mathbb{R}$.

a) Conclua que X e Y são v.a.r. identicamente distribuídas e independentes.

b) Suponha que (X, Y) é absolutamente contínuo e considere a v.a.r. $Z = \min(X, Y)$. Mostre que a v.a.r. Z é absolutamente contínua de densidade

$$h(z) = 2f(z)[1 - F(z)],$$

onde f é uma densidade de probabilidade sobre $\mathbb{R}$.

2. O rendimento relativo aos créditos concedidos diariamente por uma agência bancária de um certo grupo económico é bem descrito por uma v.a.r. X seguindo a lei absolutamente contínua de densidade

$$f(x) = \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} \mathbb{I}_{]1,+\infty[}(x).$$

a) Deduza a probabilidade de tais rendimentos diários serem superiores a um valor l arbitrariamente fixo $(l > 0)$.

v.p.f.

b) Obtenha o intervalo interquartil associado à distribuição da v.a.r. X.

c) Mostre que os logaritmos desses rendimentos diários, $Y = \ln X$, são bem descritos por uma v.a.r. seguindo uma lei exponencial.

d) Mostre que Y admite momentos de todas as ordens e calcule o seu valor médio.

e) Seja Z uma v.a.r. descrevendo o rendimento relativo aos créditos concedidos diariamente por outra agência bancária do mesmo grupo económico. Suponha que as v.a.r. Z e X são independentes e identicamente distribuídas.

i. Obtenha, caso exista, o valor médio da v.a.r. YZ.

ii. Determine a lei da v.a.r. $\ln(XZ)$.

iii. Calcule a probabilidade da média geométrica dos rendimentos diários das duas agências bancárias, $(XZ)^{\frac{1}{2}}$, ser superior a 2.

Cotação

I-1. 3.5 valores

2. 4.5 valores

II-1. 3.5 valores

2. 8.5 valores