Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30m — 22 - 06 - 2011

Observação: Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

I

1. Considere um qualquer espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos de $\mathcal{A}$.

a) Diga em que condições será $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos independentes.

b) Sendo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos independentes, prove que

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{2n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} P\left(A_{2n}\right).$$

c) Considere uma sucessão de variáveis aleatórias reais (v.a.r.) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, identicamente distribuídas com a lei normal de valor médio -3 e variância 1.

(i) Calcule a probabilidade do acontecimento $A_n = \{|X_n| < 5\}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Sabendo que os acontecimentos de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são independentes, calcule a probabilidade do acontecimento B:"ocorre algum dos acontecimentos de ordem par da sucessão $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$".

2. Determinado supermercado vende ovos de duas marcas A e B. Sabe-se que 70% das vendas diárias de ovos nesse supermercado são da marca A. Dos ovos da marca A que estão diariamente para venda, 30% são grandes, 50% são médios e os restantes são pequenos. Relativamente aos ovos da marca B, aquelas percentagens são 40%, 30% e 30%, respectivamente.

Sabe-se ainda que dos ovos da marca A que estão diariamente para venda, 30% são castanhos e que a percentagem correspondente para a marca B é de 40%. Em cada marca, a cor dos ovos é independente do tamanho.

a) Qual a percentagem de ovos grandes e castanhos que estão diariamente para venda?

b) Qual a probabilidade de que um ovo castanho seja grande?

c) Verifique se, no conjunto dos ovos que estão diariamente para venda, o tamanho é independente da cor.

II

1. Sejam X e Y v.a.r. discretas, independentes e identicamente distribuídas com uma lei Q de suporte $S = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.

a) Prove que se Q admite valor médio então a v.a.r. $Z = XY$ tem valor médio e indique o seu valor.

b) Supondo que Q é a lei de função de probabilidade

$$f(x) = (1-p)\ p^{x-1}\mathbb{I}_{\mathbb{N}}(x) \quad (p \in\ ]0,1[\,, \text{ arbitrariamente fixo}),$$

calcule $E(Z)$.

2. Seja X uma v.a.r. que descreve o tempo de atendimento (em horas) de um cliente num balcão de certa repartição pública. Sabe-se que a função característica da lei de X é dada por

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^2 \quad (\lambda > 0, \text{ arbitrariamente fixo}).$$

Além disso sabe-se que, nesse balcão, apenas um cliente é atendido de cada vez e que os tempos de atendimento são independentes entre si.

v.p.f.

a) Identifique a lei de X e prove que a sua função de distribuição é

$$F(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\left(1 + \lambda x\right)\right) \mathbb{I}_{]0,+\infty[}\left(x\right).$$

b) Prove que X admite momentos de todas as ordens e calcule os respectivos valor médio e variância.

c) Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a.r independentes e identicamente distribuídas com X. Determine a lei da variável aleatória real $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

d) Suponha $\lambda = 8$. Considere que um cliente chega ao referido balcão no momento em que um outro começa a ser atendido e que existem ainda 4 a aguardar atendimento.

i. Determine o valor médio do tempo de espera do dito cliente e o respectivo desvio padrão.

ii. Calcule a probabilidade de que o tempo de atendimento de qualquer um dos 5 clientes já presentes na repartição seja, no máximo, de vinte minutos.

Cotação

I-1. 5.5 valores

2. 4.5 valores

II-1. 3.0 valores

2. 7.0 valores