Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Probabilidades

Duração: 2h00m 04-06-2011

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

I. Seja X uma variável aleatória real (v.a.r.) definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e considere a função real P_X definida sobre a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$, por

$$\forall B \in \mathcal{B},\ P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right).$$

1. Mostre que P_X é uma probabilidade sobre o espaço probabilizável $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

2. Sejam $B_1, B_2, ..., B_n,$ n acontecimentos de $\mathcal{B}$ tais que $P_X\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right) > 0,\ n \geq 2$. Prove que, para todo $n \geq 2$,

$$P_X\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = P\left(X \in B_1\right).\prod_{i=2}^{n} P\left(X \in B_i \,\middle|\, X \in \bigcap_{j=1}^{i-1} B_j\right).$$

II. Certa companhia de seguros classifica os seus clientes do ramo automóvel em três classes de acordo com o seu histórico neste domínio: segurados de baixo, médio e alto risco. Os registos da companhia indicam que as probabilidades de que segurados de baixo risco, médio risco e alto risco se vejam, durante um ano, envolvidos em acidente são, respectivamente, 0.02, 0.1 e 0.3. Sabe-se ainda que 20% da população dos clientes da companhia é de alto risco e que 60% da parte restante é de médio risco.

1. Determine a percentagem de segurados da companhia que, num qualquer ano fixo, se vê envolvida em acidente.

2. Se em 2010 determinado segurado da companhia não registou qualquer acidente, determine a probabilidade de ser um segurado de médio risco.

3. Estudos estatísticos empíricos permitiram concluir que o número de acidentes que são registados diariamente na referida companhia num determinado período do ano é bem descrito por uma v.a.r. X seguindo a lei de Poisson de parâmetro 3.5.

a) Constate que X admite momentos de todas as ordens e indique o seu valor médio.

b) Obtenha a lei da v.a.r. Y que descreve o número de acidentes registados em 5 dias escolhidos aleatoriamente no referido período do ano.

c) Determine a probabilidade de nos 5 dias úteis de uma semana do referido período, arbitrariamente escolhida, serem registados na referida companhia pelo menos 12 acidentes.

III. Seja (X, Y) um vector aleatório real bidimensional de função de distribuição F.

1. Prove que a função de distribuição da v.a.r. X, F_X, é dada por

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y),\ x \in \mathbb{R}.$$

v.p.f.

2. Suponha que as v.a.r. X e Y descrevem o tempo que decorre entre a chegada consecutiva de veículos a uma estação de serviço para abastecer, respectivamente, de gasolina e de gasóleo. A lei de (X, Y) é absolutamente contínua e com função de distribuição, F, dada por

$$F(x, y) = (1 - e^{-x} - e^{-3y} + e^{-(x+3y)})\mathbb{I}_{]0,+\infty[^2}(x, y).$$

a) Prove que as v.a.r. X e Y são independentes.

b) Deduza que uma versão da densidade da lei de (X, Y) é a função

$$f(x, y) = 3e^{-(x+3y)}\mathbb{I}_{]0,+\infty[^2}(x, y).$$

c) Calcule a probabilidade do acontecimento $\{Y < X\}$ e interprete o resultado obtido.

Cotação

I - 3.0

II - 5.5

III - 5.5