

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA  
**Teste de Probabilidades**

**Duração:** 45m

15-03-2011

**Observação:** A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  e seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de acontecimentos neste espaço tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$ .

- a) Prove que  $P(\limsup A_n) = 0$ .  
b) Conclua que, a partir de uma certa ordem, ocorrem quase certamente todos os acontecimentos  $(A_n^c)$ .

2. Para a experiência aleatória: “lançamento de um dado equilibrado 2 vezes consecutivas”, defina os seguintes acontecimentos:

$$E_j = \begin{cases} \text{“ocorre número primo no } j\text{-ésimo lançamento”}, & j = 1, 2 \\ \text{“ocorre quatro e número primo nos dois lançamentos”}, & j = 3. \end{cases}$$

- a) Prove que os acontecimentos  $E_1, E_2, E_3$  são dois a dois independentes.  
b) Será  $(E_1, E_2, E_3)$  uma família de acontecimentos mutuamente independentes?
3. Determinado laboratório farmacológico submete regularmente os produtos que comercializa a testes realizados por dois serviços de controlo de qualidade, designados  $Q_1$  e  $Q_2$ . A análise conjunta dos resultados provenientes de tais testes pode levar à decisão de retirar do mercado determinado produto em estudo. Observações efectuadas ao longo de um período considerável permitiram concluir que é de 70% a probabilidade de tal análise levar à decisão de manter o produto no mercado. Além disso, o serviço  $Q_1$  fornece informação errada em 2% dos casos, enquanto que o serviço  $Q_2$  o faz 5% das vezes, sendo as falhas de cada serviço independentes das do outro.

- a) Sabendo que determinado produto em análise tem condições para se manter no mercado, calcule a probabilidade de que só os testes provenientes do serviço  $Q_2$  tenham dado tal indicação.  
b) Mostre que a probabilidade de que apenas o serviço  $Q_1$  aconselhe a retirada de um produto do mercado é de 0.028.  
c) Qual a probabilidade da administração do laboratório decidir manter o produto no mercado quando apenas o serviço  $Q_1$  indica que seja retirado?