Susana

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Teoria dos Números

Exame final – 21 de Fevereiro de 2003

1. Prove que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem
$$3 \mid n^3 + 2n\,.$$

2. Determine dois inteiros ≥ 1000 cujo máximo divisor comum seja 72.

3. Como sabe, sendo a e b números naturais, tem-se $[a, b] \cdot (a, b) = ab$.
   (a) Apresente um exemplo que mostre que, sendo a, b, c números naturais, não se tem necessariamente $[a, b, c] \cdot (a, b, c) = abc$.
   (b) Prove que, sendo $a, b, c \in \mathbb{N}$, se tem
$$[a, b, c] \cdot (ab, ac, bc) = abc\,.$$

4. Prove que o número de primos é infinito.

5. Determine o menor inteiro positivo u que satisfaz $58u \equiv 48 \pmod{142}$.

6. (a) Diga como se define a função σ no conjunto dos números naturais e indique a fórmula que permite calcular $\sigma(n)$ se conhecermos a factorização de n como produto de primos.
   (b) Demonstre essa fórmula.

Teoria dos Números

Resumo da resolução do exame de 21/2/2003

1. Vamos proceder por indução. Designemos a relação indicada por $P(n)$.

   1º passo: $P(1)$ é verdadeira, porque $3 \mid 1^3 + 2$.

   2º passo: Seja $k \in \mathbb{N}$ qualquer e suponhamos que $P(k)$ é verdadeira (hipótese de indução). Vamos provar que, então, $P(k+1)$ é verdadeira, isto é, que

   $$3 \mid (k+1)^3 + 2(k+1).$$

   Temos

   $$\begin{aligned}(k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \\ &= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1).\end{aligned}$$

   Como, pela hipótese de indução, $k^3 + 2k$ é múltiplo de 3, concluímos que $(k+1)^3 + 2(k+1)$ é múltiplo de 3, como se pretendia demonstrar.

2. Basta tomar $72a$ e $72b$, com a e b primos entre si e tais que $72a \geq 1000$ e $72b \geq 1000$. Por exemplo, com $a = 14$ e $b = 15$ obtemos os números 1008 e 1080, cujo m.d.c. é 72.

3. (a) Tome-se, por exemplo, $a = 2$, $b = 3$ e $c = 6$. Então tem-se $[a,b,c] = 6$ e $(a,b,c) = 1$ mas $abc = 36$.

   (b) Tem-se

   $$[a,b,c] = [[a,b],c] = \left[\frac{ab}{(a,b)}, c\right] = \frac{\frac{ab}{(a,b)}\,c}{\left(\frac{ab}{(a,b)}, c\right)} = \frac{(a,b)\cdot\frac{ab}{(a,b)}\,c}{(a,b)\cdot\left(\frac{ab}{(a,b)}, c\right)} = \frac{abc}{(ab,(a,b)c)} = \frac{abc}{(ab,ac,bc)}$$

   onde usámos por duas vezes o facto de que, sendo u e v números naturais, se tem $[u,v] = \dfrac{uv}{(u,v)}$.

4. Pergunta teórica directa.

5. Como $(58, 142) = 2$ e $2 \mid 48$, existem soluções da congruência $58x \equiv 48 \pmod{142}$, que são as mesmas que as da congruência $\frac{58}{2}x \equiv \frac{48}{2} \pmod{\frac{142}{2}}$, ou $29x \equiv 24 \pmod{71}$.

   Note-se que $(29, 71) = 1$. Usando o algoritmo de Euclides, vemos que $-22 \cdot 29 + 9 \cdot 71 = 1$. Logo, tem-se $29 \cdot (-22) \equiv 1 \pmod{71}$, isto é, -22 é uma solução da congruência $29x \equiv 1 \pmod{71}$. Segue-se que $(-22) \cdot 24 = -528$ é uma solução da congruência $29x \equiv 24 \pmod{71}$.

   Ora nós sabemos que todas as soluções desta congruência são congruentes entre si módulo 71. O conjunto completo das soluções é portanto a classe de congruência $[-528]_{71}$.

   Resta encontrar o menor inteiro positivo que pertence a esta classe de congruência. Facilmente se vê que esse inteiro é $-528 + 8 \cdot 71 = 40$.

6. Pergunta teórica directa.

Cotação:

1. 2.5
2. 2.5
3. (a) 1.5
   (b) 2.5
4. 3
5. 3.5
6. (a) 2
   (b) 2.5