Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Teoria dos Números

1º teste - 2ª fase — 3 de Dezembro de 2002

Resolução

1. **Prove que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem**

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Vamos proceder por indução. Designemos a igualdade indicada por $P(n)$.

1º passo: $P(1)$ é verdadeira, porque $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$.

2º passo: Seja $k \in \mathbb{N}$ qualquer e suponhamos que $P(k)$ é verdadeira (hipótese de indução). Vamos provar que, então, $P(k+1)$ é verdadeira, isto é, que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Usando a hipótese de indução temos

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

como se pretendia demonstrar.

Erro frequente: Designar por $P(n)$ a expressão $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ e depois usar frases como "$P(n)$ é verdadeira". Uma expressão não é verdadeira ou falsa.

2. **Determine inteiros x e y tais que $649x+154y=22$.**

Tem-se $649=4\cdot 154+33$, $154=4\cdot 33+22$, $33=1\cdot 22+11$, $22=2\cdot 11$, pelo que $(649,154)=11$. Substituindo do fim para o princípio, obtém-se

$$11=33-22=33-(154-4\cdot 33)=-154+5\cdot 33=-154+5(649-4\cdot 154)$$

donde $11=5\cdot 649-21\cdot 154$. Daqui tira-se que $22=10\cdot 649-42\cdot 154$.

Em alternativa podemos usar directamente as igualdades $649=4\cdot 154+33$ e $154=4\cdot 33+22$, obtendo-se $22=-4\cdot 649+17\cdot 154$.

3. **Determine o menor número natural a que tem exactamente 13 divisores positivos (incluindo 1 e a).**

Sabemos que, sendo $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, se tem $\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$. Como $\tau(a) = 13$ e 13 não se pode escrever como um produto com dois ou mais factores, a é da forma p^{12}, com p primo. Como o menor número primo que existe é 2, tem-se $a = 2^{12}$.

4. **Sendo a, b e c números inteiros, prove que $(a, bc) = 1 \iff [(a, b) = 1$ e $(a, c) = 1]$.**

A observação fundamental é que os factores primos de bc são os de b reunidos com os de c.

($\Longrightarrow$) Se a não tem factores primos em comum com bc, também não os tem com b nem com c.

($\Longleftarrow$) Se a não tem factores primos em comum com b nem com c, também não os tem com bc.

Cotação: Todas as perguntas valem 0.25.