Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Teoria dos Números

1º teste — 7 de Novembro de 2002

Resolução

1. **Prove que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem**

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Vamos proceder por indução. Designemos a igualdade indicada por $P(n)$.

1º passo: $P(1)$ é verdadeira, porque $1 \cdot 2 = \dfrac{1(1+1)(1+2)}{3}$

2º passo: Seja $k \in \mathbb{N}$ qualquer e suponhamos que $P(k)$ é verdadeira (hipótese de indução). Vamos provar que, então, $P(k+1)$ é verdadeira, isto é, que

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Usando a hipótese de indução temos

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

como se pretendia demonstrar.

Erro frequente: Designar por $P(n)$ a expressão $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)$ e depois usar frases como "$P(n)$ é verdadeira". Uma expressão não é verdadeira ou falsa.

2. **Sejam b e c inteiros não ambos nulos. Prove que $\forall_{x \in \mathbb{Z}} \quad (b,c) = (b, c+xb)$.**

Designemos (b,c) por d e $(b, c+xb)$ por d'. Como $d \mid b$ e $d \mid c$, d divide $c + xb$, pelo que $d \mid d'$. Analogamente, como $d' \mid b$ e $d' \mid c + xb$, d' divide c, pelo que $d' \mid d$. De $d \mid d'$ e $d' \mid d$ sai que $d = d'$.

Outra resolução: Existem inteiros s e t tais que $(b, c+xb) = bs + (c+xb)t$. Daqui sai que $(b, c+xb) = b(s+xt) + ct$. Mas (b,c) é o menor natural que se escreve como soma de um múltiplo de b com um múltiplo de c. Logo, $(b,c) \leq (b, c+xb)$. Com um raciocínio análogo conclui-se que $(b, c+xb) \leq (b,c)$.

3. **Sendo $a \in \mathbb{N}$, designamos por $\tau(a)$ o número de divisores positivos de a (incluindo 1 e a). Sabendo que $3 \mid a$, $4 \mid a$ e $\tau(a) = 14$, determine a.**

Sabemos que, sendo $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, se tem $\tau(a) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$. Como $\tau(a) = 14$ e 14 só se pode factorizar como 14 ou $2 \cdot 7$, ou a é da forma p^{13}, com p primo, ou da forma $p_1^6 p_2$, com p_1 e p_2 primos. Como $3 \mid a$ e $4 \mid a$, 2 e 3 são factores de a, pelo que tem que ocorrer o segundo daqueles casos, sendo 2 e 3 os factores primos de a. Como $4 \mid a$, o expoente de 2 é pelo menos 2, pelo que $a = 2^6 \cdot 3 = 192$.

Erro frequente: Dizer que $a = 4^6 \cdot 3$ ou $a = 4 \cdot 3^6$. O número 4 não é primo.

4. **Sejam a e b dois números naturais. Prove que, se $a^2 \mid b^2$, então $a \mid b$.**

Sejam $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, com $\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_k \geq 0, \beta_1 \geq 0, \ldots, \beta_k \geq 0$.

Como $a = p_1^{2\alpha_1} \cdots p_k^{2\alpha_k}$, $b = p_1^{2\beta_1} \cdots p_k^{2\beta_k}$, a hipótese $a^2 | b^2$ significa que $2\alpha_i \leq 2\beta_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Segue-se que $\alpha_i \leq \beta_i$, $i = 1, \ldots, k$, o que significa que $a \mid b$.

Erros frequentes: A hipótese significa que existe um inteiro x tal que $b^2 = a^2 x$. Pretendemos provar que existe um inteiro y tal que $b = ay$. Até aqui tudo bem. O erro surge quando se diz que o número $y = \sqrt{x}$ serve para o fim em vista, porque seria preciso demonstrar que $\sqrt{x}$ é um inteiro. Uma variante é dizer que o número $y = ax/b$ serve para o fim em vista; há erro porque seria preciso demonstrar que ax/b é inteiro.

Outro erro ainda é escrever o seguinte: De $b = ay$ sai que $b^2 = a^2 y^2$. Basta então tomar $x = y^2$. O erro aqui é de lógica: a hipótese dá-nos x, mas y é procurado, não é dado.

Cotação: Todas as perguntas valem 0.25.