DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
TEORIA DOS NÚMEROS

Uma possível resolução do 1º Teste — Prova A

4 de Novembro de 2003 — Duração: 30m

---

1. (0,3 valores)
Determine inteiros x e y tais $3696\,x + 847\,y = 77$.

Existem inteiros x e y satisfazendo a igualdade indicada se e só se $(3696, 847) \mid 77$. Use-se o algoritmo de Euclides para calcular $(3696, 847)$.

Tem-se $3696 = 4 \times 847 + 308$, $847 = 2 \times 308 + 231$, $308 = 1 \times 231 + 77$ e $231 = 3 \times 77$. Então $(3696, 847) = 77$ e, das igualdades anteriores, obtém-se

$$\begin{aligned} 77 &= 308 - 231 \\ &= 308 - (847 - 2 \times 308) \\ &= 3 \times 308 - 847 \\ &= 3(3696 - 4 \times 847) - 847 \\ &= 3 \times 3696 + (-13)847\,. \end{aligned}$$

Assim os inteiros $x = 3$ e $y = -13$ satisfazem o pedido.

Erros frequentes: divisões mal feitas.

---

2. (0,3 valores)
Sejam a e b dois inteiros e p um número primo. Prove que, se p divide $\mathbf{a^2 + b^2}$ e p divide $\mathbf{2a^2 + 3b^2}$, então p divide a e p divide b.

Se p divide $a^2 + b^2$ e p divide $2a^2 + 3b^2$ então p divide $(2a^2 + 3b^2) - 2(a^2 + b^2)$, ou seja, p divide b^2. Uma vez que p é primo, se divide um produto tem que dividir pelo menos um dos factores. Assim, do facto de p dividir $b^2 = b \times b$, conclui-se que $\underline{p \text{ divide } b}$. Por outro lado, se p divide b^2 e p divide $a^2 + b^2$ então p divide $(a^2 + b^2) - b^2 = a^2$ e portanto, pela razão exposta anteriormente, $\underline{p \text{ divide } a}$.

Erro frequente: Se p divide $a^2 + b^2$ então p divide a^2 e p divide b^2.

---

3. (0,4 valores)
Prove que, para todo o $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, se tem

$$\mathbf{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}}\,.$$

Use-se indução. Seja $P(n)$ a afirmação de variável natural n indicada no enunciado.

- A afirmação $P(1)$ é verdadeira porque

$$1^2 = 1 = \frac{1 \times 1 \times 3}{3} = \frac{1 \times (2 \times 1 - 1)(2 \times 1 + 1)}{3}\,.$$

- Seja $k \in \mathbb{N}$, arbitrário e suponha-se que $P(k)$ é verdadeira, isto é, suponha-se que

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} \qquad \text{(hipótese de indução)}\,.$$

  Pretende provar-se que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é, que

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 = \frac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}\,.$$

  Usando a hipótese de indução obtém-se

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 &= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 \\ &= (2k+1)\left[\frac{k(2k-1)}{3} + 2k + 1\right] \\ &= (2k+1)\,\frac{2k^2 - k + 6k + 3}{3} \\ &= (2k+1)\,\frac{2k^2 + 5k + 3}{3}\,. \end{aligned}$$

  Uma vez que $2k^2 + 5k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{4} \Leftrightarrow k = \dfrac{-3}{2} \vee k = -1$,

  conclui-se que $2k^2 + 5k + 3 = 2(k + \frac{3}{2})(k+1) = (2k+3)(k+1)$ e portanto

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 &= (2k+1)\,\frac{(2k+3)(k+1)}{3} \\ &= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} \\ &= \frac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}\,. \end{aligned}$$

O método de indução matemática permite assim concluir que a afirmação $P(n)$ é verdadeira, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Erros frequentes:

1. *Designar por $P(n)$ a soma $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$ e em seguida fazer afirmações do tipo "$P(1)$ é verdadeira";*

2. *Colocar como hipótese de indução que "$P(k)$ é verdadeira, para todo o $k \in \mathbb{N}$".*