Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Teoria dos Números

Uma possível resolução do Exame da Época Normal

26 de Janeiro de 2005

---

1. (2 valores)
Seja $d = (a, b)$. Uma vez que $d \mid a$ e $d \mid b$, existem $q, t \in \mathbb{Z}$ tais que $a = qd$ e $b = td$. Claro que $d \neq 0$ e

$$d = ax_0 + by_0 \Leftrightarrow d = qdx_0 + tdy_0 \Leftrightarrow 1 = qx_0 + ty_0 .$$

Conclui-se assim que o menor elemento positivo de $\{fx_0 + gy_o : f, g \in \mathbb{Z}\}$ é 1, ou seja, $(x_0, y_0) = 1$.

---

2. (3 valores)
A prova será feita por redução ao absurdo. Suponha-se então que o número de primos é finito e designem-se por $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (com $k \in \mathbb{N}$) todos os números primos, distintos 2 a 2. O número $n = p_1p_2 \cdots p_k + 1$ é inteiro e maior do que 1 e portanto é um produto de números primos. Como $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são todos os números primos, existe $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $p_i \mid n$. Obviamente também $p_i \mid p_1p_2 \cdots p_k$ e portanto $p_i \mid n - p_1p_2 \cdots p_k$, isto é, $p_i \mid 1$, o que é absurdo, porque sendo p_i primo, é maior do que 1 e os divisores de 1 são apenas -1 e 1. O absurdo resultou de termos suposto que o número de primos é finito, concluindo-se assim que existe uma infinidade de números primos.

---

3. (3 valores)
Uma vez que 23 é primo, aplicando o Teorema de Wilson, obtém-se que $22! = (23 - 1)! \equiv -1 \pmod{23}$.

Por outro lado, porque $(26, 23) = 1$, aplicando o Teorema de Fermat, resulta que $26^{22} \equiv 1 \pmod{23}$. Dividindo 2005 por 22 obtém-se $2005 = 91 \times 22 + 3$ e assim,

$$26^{2005} = \left(26^{22}\right)^{91} 26^3 \equiv 1^{91} 26^3 \pmod{23} \equiv 3^3 \pmod{23} \equiv 4 \pmod{23} .$$

Então

$$22! - 26^{2005} \equiv -1 - 4 \pmod{23} \equiv 18 \pmod{23} .$$

O resto da divisão inteira de $22! - 26^{2005}$ por 23 é 18.

---

4. (3 valores)
Uma vez que 3, 4 e 7 são primos dois a dois, o Teorema chinês dos resíduos garante que o sistema

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \\ x \equiv 1 \pmod{7} \end{cases} \tag{1}$$

tem solução, sendo o conjunto das soluções uma classe de congruência módulo $3\times4\times7 = 84$. Resolvam-se as congruências auxiliares $\frac{84}{3}\,b_1 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)$, $\frac{84}{4}\,b_2 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)$ e $\frac{84}{7}\,b_3 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,7)$.

$\frac{84}{3}\,b_1 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3) \Leftrightarrow 28b_1 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3) \Leftrightarrow b_1 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)$
$\frac{84}{4}\,b_2 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4) \Leftrightarrow 21b_2 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4) \Leftrightarrow b_2 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)$
$\frac{84}{7}\,b_3 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,7) \Leftrightarrow 12b_3 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,7) \Leftrightarrow 5b_3 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,7) \Leftrightarrow 15b_3 \equiv 3\,(\mathrm{mod}\,7)$
$\Leftrightarrow b_3 \equiv 3\,(\mathrm{mod}\,7)$.

Considerem-se $b_1 = 3$, $b_2 = 2$ e $b_3 = 3$.

Então $2 \times \frac{84}{3}\,b_1 + 2 \times \frac{84}{4}\,b_2 + 1 \times \frac{84}{7}\,b_3 = 2 \times 28 \times 1 + 2 \times 21 \times 1 + 12 \times 3 = 134$ é uma solução de (1) e (Teorema chinês dos resíduos) o conjunto das soluções de (1) é $[134]_{84} = [50]_{84} = \{50 + 84k : k \in \mathbb{Z}\}$. Uma vez que $50 + 84 = 134$, $50 + 2 \times 84 = 218$ e $50 + 3 \times 84 = 302$, o maior inteiro que é solução de (1) e é inferior ou igual a 300 é 218.

---

5. (3 valores)
Designe-se por n o menor número natural que é múltiplo de 15 e tem 10 divisores positivos, e seja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ a sua decomposição canónica. Isto é, $r \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ são números primos distintos dois a dois e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$. Uma vez que $15 = 3 \times 5$, n é múltiplo de 15 se e só se $r \geq 2$ e $3, 5 \in \{p_1, \ldots, p_r\}$. Suponha-se que $p_1 = 3$ e $p_2 = 5$.

O número de divisores positivos de n é $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$. Então

$$\begin{aligned} \tau(n) = 10 \quad &\Leftrightarrow \quad (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1) = 2 \times 5 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} r = 2 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 4 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} r = 2 \\ \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = 1 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Conclui-se assim que há dois números naturais que são múltiplos de 15 e têm 10 divisores positivos: 3×5^4 e $3^4 \times 5$. Uma vez que $3^4 \times 5 = 3^3\,(3 \times 5) < 5^3\,(3 \times 5) = 3 \times 5^4$, o menor número natural, múltiplo de 15 e com 10 divisores positivos, é $3^4 \times 5$.

$$\sigma\left(3^4 \times 5\right) = \frac{3^5 - 1}{3 - 1}\,\frac{5^2 - 1}{5 - 1} = \frac{243 - 1}{2}\,\frac{24}{4} = 242 \times 3 = 726\,.$$

---

6. (2,5 valores)
Solução 1- Em cada uma das a classes de congruência módulo a há exactamente 2 elementos de $\{1, 2, \ldots, 2a\}$:

$$\begin{array}{l} 1, a + 1 \in [1]_a \\ 2, a + 2 \in [2]_a \\ \quad\vdots \\ a - 1, 2a - 1 \in [a - 1]_a \\ a, 2a \in [a]_a\,. \end{array}$$

Além disso, em cada classe de congruência módulo a ou todos os elementos são primos com a ou nenhum é, porque $n \equiv m\,(\mathrm{mod}\,a) \Rightarrow (n, a) = (m, a)$. Então o número de inteiros positivos inferiores ou iguais a $2a$, e que são primos com a, é o dobro do número de classes de congruência módulo a cujos elementos são primos com a, ou seja, é

$$2 \times \sharp\{n \in \{1, 2, \ldots, a\} : (n, a) = 1\} = 2\,\varphi(a)\,.$$

Solução 2- O número de inteiros positivos inferiores ou iguais a $2a$ e que são primos com a é

$$\sharp\{n \in \{1, 2, \ldots, a\} : (n, a) = 1\} + \sharp\{n \in \{a+1, a+2, \ldots, 2a\} : (n, a) = 1\}\,.$$

A função

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \{a+1, a+2, \ldots, 2a\} & \longrightarrow & \{1, 2, \ldots, a\} \\ & & n & \longmapsto & n-a \end{array}$$

é bijectiva e, além disso, para $n \in \{a+1, a+2, \ldots, 2a\}$,

$$(n, a) = 1 \Leftrightarrow (n-a, a) = 1 \Leftrightarrow (f(n), a) = 1\,.$$

Então

$$\sharp\{n \in \{a+1, a+2, \ldots, 2a\} : (n, a) = 1\} = \sharp\{n \in \{1, 2, \ldots, a\} : (n, a) = 1\} = \varphi(a)\,,$$

e o número de inteiros positivos inferiores ou iguais a $2a$, e que são primos com a, é $2\varphi(a)$.

Solução 3

1º caso: $2 \mid a$.

Suponha-se que $a = 2^k b$, com $k, b \in \mathbb{N}$ e b ímpar. Então, para $n \in \{1, 2, \ldots, 2a\}$,

$$(n, a) = 1 \Leftrightarrow (n, 2^k b) = 1 \Leftrightarrow 2 \nmid n \wedge (n, b) = 1 \Leftrightarrow (n, 2^{k+1} b) = 1 \Leftrightarrow (n, 2a) = 1\,.$$

Assim, neste caso,

$$\sharp\{n \in \{1, 2, \ldots, 2a\} : (n, a) = 1\} = \sharp\{n \in \{1, 2, \ldots, 2a\} : (n, 2a) = 1\} = \varphi(2a)\,.$$

Por outro lado, $\varphi(2a) = \varphi(2^{k+1}b) = \varphi(2^{k+1})\varphi(b) = (2^{k+1} - 2^k)\varphi(b) = 2(2^k - 2^{k-1})\varphi(b) = 2\varphi(2^k b) = 2\varphi(a)$.

2º caso: $2 \nmid a$.

Neste caso, os elementos de $\{1, 2, \ldots, 2a\}$ que são primos com a são os que são primos com $2a$ (o número destes é $\varphi(2a)$) e, além desses, os que têm em comum com $2a$ exactamente um factor primo, o 2. Estes últimos são todos os inteiros da forma $2k$, com $k \in \{1, 2, \ldots, a\}$ e $(k, a) = 1$. Uma vez que

$$\sharp\{2k : k \in \{1, 2, \ldots, a\} \text{ e } (k, a) = 1\} = \sharp\{k \in \{1, 2, \ldots, a\} \text{ e } (k, a) = 1\} = \varphi(a)\,,$$

e atendendo a que $(2, a) = 1$, conclui-se que o número de inteiros positivos inferiores ou iguais a $2a$ e que são primos com a é

$$\varphi(2a) + \varphi(a) = \varphi(2)\varphi(a) + \varphi(a) = \varphi(a) + \varphi(a) = 2\varphi(a)\,.$$

7. (3,5 valores)
(a) Designem-se por x e y, respectivamente, a capacidade das mesas circulares e a capacidade das mesas rectangulares. Então

$$55\,x + 77\,y = 902\,. \tag{2}$$

Assim, a capacidade das mesas circulares e a capacidade das mesas rectangulares formam um par, (x, y), de inteiros que verificam a equação Diofantina linear (2) e, além disso, satisfazem $x \geq 2$ e $y \geq 2$.

(b) Resolva-se a equação (2). Comece-se por determinar $(55, 77)$. De $77 = 1 \times 55 + 22$, $55 = 2 \times 22 + 11$ e $22 = 2 \times 11$, por aplicação do algoritmo de Euclides, conclui-se que $(55, 77) = 11$.

Uma vez que $902 = 82 \times 11$, $(55, 77) \mid 902$ e a equação (2) tem soluções inteiras.

De

$$11 = 55 - 2 \times 22 = 55 - 2(77 - 55) = 3 \times 55 - 2 \times 77$$

resulta que

$$902 = 82 \times 11 = 82 \times (3 \times 55 - 2 \times 77) = 246 \times 55 - 164 \times 77$$

e portanto $x_0 = 246$ e $y_0 = -164$ são inteiros que verificam (2). Sejam x e y inteiros tais que $55\,x + 77\,y = 902$. Então

$$55\,x + 77\,y = 55\,x_0 + 77\,y_0 \Leftrightarrow 55(x - x_0) = 77(y_0 - y) \Leftrightarrow 5(x - x_0) = 7(y_0 - y)\,,$$

concluindo-se, porque $(5, 7) = 1$, que $7 \mid x - x_0$ e $5 \mid y_0 - y$. Isto é, existem $q, t \in \mathbb{Z}$ tais que $x = x_0 + 7q$ e $y = y_0 - 5t$. Uma vez que

$$\begin{aligned} 55\,x + 77\,y = 902 \quad &\Leftrightarrow \quad 55\,x_0 + 55 \times 7 \times q + 77\,y_0 - 77 \times 5 \times t = 902 \\ &\Leftrightarrow \quad 902 + 5 \times 11 \times 7(q - t) = 902 \\ &\Leftrightarrow \quad q = t\,, \end{aligned}$$

as soluções inteiras de (2) são dadas por

$$\begin{cases} x = x_0 + 7q = 246 + 7q \\ y = y_0 - 5q = -164 - 5q \end{cases}, \quad q \in \mathbb{Z}\,.$$

Falta procurar as soluções de (2) que verificam $x \geq 2$ e $y \geq 2$.

Sejam $x = 246 + 7q$ e $y = -164 - 5q$, com $q \in \mathbb{Z}$.

$$x \geq 2 \Leftrightarrow 246 + 7q \geq 2 \Leftrightarrow 7q \geq -244 \Leftrightarrow q \geq -\frac{244}{7}\,.$$

Atendendo a que $244 = 34 \times 7 + 6$, $-\frac{244}{7} = -34 - \frac{6}{7}$ e portanto, <u>para q inteiro</u>, $q \geq -\frac{244}{7} \Leftrightarrow q \geq -34$. Analogamente, sendo q inteiro,

$$y \geq 2 \Leftrightarrow -164 - 5q \geq 2 \Leftrightarrow q \leq -\frac{166}{5} \Leftrightarrow q \leq -33 - \frac{1}{5} \Leftrightarrow q \leq -34\,.$$

Conjugando as duas desigualdades obtém-se $q = -34$ e assim, $x = 246 + 7(-34) = 246 - 238 = 8$ e $y = -164 - 5(-34) = -164 + 170 = 6$.

A capacidade das mesas circulares é de 8 pessoas e a das mesas rectangulares é de 6 pessoas.

Resolução de (b) para quem não respondeu a (a)

Resolva-se a equação

$$52\,x + 91\,y = 923\,. \tag{3}$$

Comece-se por determinar $(52, 91)$. De $91 = 1 \times 52 + 39$, $52 = 1 \times 39 + 13$ e $39 = 3 \times 13$, por aplicação do algoritmo de Euclides, conclui-se que $(52, 91) = 13$.

Uma vez que $923 = 71 \times 13$, $(52, 91) \mid 923$ e a equação (3) tem soluções inteiras.

De

$$13 = 52 - 39 = 52 - (91 - 52) = 2 \times 52 - 91$$

resulta que

$$923 = 71 \times 13 = 71 \times (2 \times 52 - 91) = 142 \times 52 - 71 \times 91$$

e portanto $x_0 = 142$ e $y_0 = -71$ são inteiros que verificam (3). Sejam x e y inteiros tais que $52\,x + 91\,y = 923$. Então

$$52\,x + 91\,y = 52\,x_0 + 91\,y_0 \Leftrightarrow 52(x - x_0) = 91(y_0 - y) \Leftrightarrow 4(x - x_0) = 7(y_0 - y)\,,$$

concluindo-se, porque $(4, 7) = 1$, que $7 \mid x - x_0$ e $4 \mid y_0 - y$. Isto é, existem $q, t \in \mathbb{Z}$ tais que $x = x_0 + 7q$ e $y = y_0 - 4t$. Uma vez que

$$\begin{aligned} 52\,x + 91\,y = 923 \quad &\Leftrightarrow \quad 52\,x_0 + 52 \times 7 \times q + 91\,y_0 - 91 \times 4 \times t = 923 \\ &\Leftrightarrow \quad 923 + 4 \times 13 \times 7(q - t) = 923 \\ &\Leftrightarrow \quad q = t\,, \end{aligned}$$

as soluções inteiras de (3) são dadas por

$$\begin{cases} x = x_0 + 7q = 142 + 7q \\ y = y_0 - 4q = -71 - 4q \end{cases} , \quad q \in \mathbb{Z}\,.$$

Falta procurar as soluções de (2) que verificam $x \geq 4$ e $y \geq 3$.

Sejam $x = 142 + 7q$ e $y = -71 - 4q$, com $q \in \mathbb{Z}$.

$$x \geq 4 \Leftrightarrow 142 + 7q \geq 4 \Leftrightarrow 7q \geq -138 \Leftrightarrow q \geq -\frac{138}{7}\,.$$

Atendendo a que $138 = 19 \times 7 + 5$, $-\frac{138}{7} = -19 - \frac{5}{7}$ e portanto, para q inteiro, $q \geq -\frac{138}{7} \Leftrightarrow q \geq -19$. Analogamente, sendo q inteiro,

$$y \geq 3 \Leftrightarrow -71 - 4q \geq 3 \Leftrightarrow q \leq -\frac{74}{4} \Leftrightarrow q \leq -18 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow q \leq -19\,.$$

Conjugando as duas desigualdades obtém-se $q = -19$ e assim, $x = 142 + 7(-19) = 142 - 133 = 9$ e $y = -71 - 4(-19) = -71 + 76 = 5$.