Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Teoria dos Números
Licenciatura em Matemática

26 de Janeiro de 2005 — Duração: 2h30m

Não é permitido o uso de calculadoras. Justifique resumidamente todas as afirmações que efectuar. Não escreva a lápis nem a vermelho. Qualquer tentativa de fraude será punida com o anulamento da prova.

---

1. Mostre que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se $(a, b) = ax_0 + by_0$, com $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$, então $(x_0, y_0) = 1$.

2. Prove que existe uma infinidade de números primos.

3. Calcule o resto da divisão inteira de $22! - 26^{2005}$ por 23.

4. Usando o Teorema chinês dos resíduos determine o maior inteiro $x \leq 300$ que verifica, simultaneamente, $x \equiv 2 \pmod 3$, $x \equiv 2 \pmod 4$ e $x \equiv 1 \pmod 7$.

5. Calcule $\sigma(n)$, sendo n o menor número natural que é múltiplo de 15 e tem exactamente 10 divisores positivos.

6. Seja $a \in \mathbb{N}$. Mostre que o número de inteiros positivos inferiores ou iguais a $2a$ e que são primos com a é $2\,\varphi(a)$.

7. Num refeitório, com capacidade para 902 pessoas, há 55 mesas circulares e 77 mesas rectangulares. As mesas circulares têm todas a mesma capacidade, o mesmo se passando com as mesas rectangulares. Além disso, a capacidade de qualquer um dos tipos de mesas é superior ou igual a 2.

   (a) Escreva uma equação Diofantina cuja resolução permita obter a capacidade das mesas circulares e a capacidade das mesas rectangulares.

   (b) Resolvendo a equação escrita em (a), determine a capacidade das mesas circulares e a capacidade das mesas rectangulares. (Se não respondeu à alínea (a) - e apenas neste caso - determine as soluções inteiras de

   $$52\,x + 91\,y = 923$$

   que verificam $x \geq 4$ e $y \geq 3$).

Cotação :

1.	2 valores	4.	3 valores
2.	3 valores	5.	3 valores
3.	3 valores	6.	2,5 valores
		7	3,5 valores