Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Recurso de Teoria dos Números
Licenciatura em Matemática

16 de Fevereiro de 2005 Duração: 2h30m

Não é permitido o uso de calculadoras. Justifique resumidamente todas as afirmações que efectuar. Não escreva a lápis nem a vermelho. Qualquer tentativa de fraude será punida com o anulamento da prova.

---

1. Mostre que, para quaisquer inteiros a e b, primos entre si, e qualquer número primo p,
$$(ab, p) = (a, p)(b, p)\,.$$
2. Enuncie e demonstre o Teorema de Euler.
3. Determine o último dígito de $1^{2005} + 3^{2005} + 5^{2005} + 7^{2005} + 9^{2005}$.
4. Usando o Teorema chinês dos resíduos determine o maior inteiro negativo, x, que verifica, simultaneamente, $x \equiv 1 \pmod 2$, $x \equiv -2 \pmod 5$ e $x \equiv 5 \pmod 9$.
5. (a) Para $m \in \mathbb{N}$ defina raíz primitiva módulo m.
   (b) Sabendo que 5 é uma raíz primitiva módulo 17 determine, caso existam, todas as soluções de $x^{10} \equiv 16 \pmod{17}$.
6. Sejam $a, p \in \mathbb{N}$, com p primo, e $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $p^k \mid a$ e $p^{k+1} \nmid a$. Mostre que
$$\sigma(p\ a) = p^{k+1}\,\sigma\left(\frac{a}{p^k}\right) + \sigma(a)\,.$$
7. Determine as medidas dos lados de todos os triângulos rectângulos em que as medidas dos lados são inteiros primos entre si e a medida de um dos catetos é 2^k, com $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$.

Cotação :	1.	2 valores
	2.	3 valores
	3.	3 valores
	4.	3 valores
	5.	4 valores
	6.	2.5 valores
	7.	2.5 valores