Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Teoria dos Números

Uma possível resolução do 1º Teste Prova B

5 de Novembro de 2004 Duração: 30m

---

1. (0.4 valores)
Usando o princípio de indução matemática prove que

$$1^2 \times 2 + 2^2 \times 4 + \cdots + n^2 \times (2n) = \frac{n^2(n+1)^2}{2}, \qquad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Seja $P(n)$ a afirmação de variável natural n indicada no enunciado.

- A afirmação $P(1)$ é verdadeira porque

$$1^2 \times 2 = 2 = \frac{1^2(1+1)^2}{2}.$$

- Seja $k \in \mathbb{N}$ e suponha-se que $P(k)$ é verdadeira, isto é, suponha-se que

$$1^2 \times 2 + 2^2 \times 4 + \cdots + k^2 \times (2k) = \frac{k^2(k+1)^2}{2} \qquad \text{(hipótese de indução)}.$$

Pretende provar-se que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é, que

$$1^2 \times 2 + 2^2 \times 4 + \cdots + k^2 \times (2k) + (k+1)^2 \times [2(k+1)] = \frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{2}.$$

Usando a hipótese de indução obtém-se

$$1^2 \times 2 + 2^2 \times 4 + \cdots + k^2 \times (2k) + (k+1)^2 \times [2(k+1)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k^2(k+1)^2}{2} + (k+1)^2 \times [2(k+1)] \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{2} + 2(k+1)^3 \\
&= (k+1)^2\left[\frac{k^2}{2} + 2(k+1)\right] \\
&= (k+1)^2\,\frac{k^2+4k+4}{2} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{2} \\
&= \frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{2}.
\end{aligned}$$

Mostrou-se assim que $P(1)$ é uma afirmação verdadeira e que, para $k \in \mathbb{N}$, qualquer, se $P(k)$ é uma afirmação verdadeira então também o é a afirmação $P(k+1)$. O princípio de indução matemática permite concluir que a afirmação $P(n)$ é verdadeira, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

---

2. Em cada uma das alíneas seguintes diga, sem justificar, se a afirmação feita é verdadeira ou falsa.

(a) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, os inteiros $\dfrac{a}{(a,b)}$ e $\dfrac{b}{(a,b)}$ são primos entre si.

(b) Para quaisquer inteiros a, b e c, se $(a, b) = 1$ e $(b, c) = 1$ então $(a, c) = 1$.

(c) Para quaisquer inteiros a e b, primos entre si, e qualquer número primo p,

$$(ap, b) = (b, p)\,.$$

(a) A afirmação é **verdadeira** (resultado demonstrado numa aula teórica).

(b) A afirmação é **falsa**. Por exemplo, $(2, 3) = (3, 4) = 1$ e $(2, 4) = 2 \neq 1$.

(c) A afirmação é **verdadeira**. Considerem-se os 2 casos possíveis:

1. $p \mid b$
   Neste caso $(b, p) = p$ e existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $b = px$. De $(a, b) = 1$, e porque $x \mid b$, conclui-se que $(a, x) = 1$. Então $(ap, b) = (ap, px) = p(a, x) = p = (b, p)$.
2. $p \nmid b$
   Neste caso $(b, p) = 1$. Além disso, de $(a, b) = 1$ e $(p, b) = 1$ resulta que $(ap, b) = 1 = (b, p)$.

Observação: Na pergunta 2 não é necessária qualquer justificação. A cotação (em valores) nesta pergunta é atribuída mediante o número de respostas certas e respostas erradas, de acordo com a tabela seguinte.

R. certas\R. erradas	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0,2	0,1	0	x
2	0,4	0,3	x	x
3	0,6	x	x	x

A escolha simultânea de duas opções numa alínea faz com que a resposta seja considerada errada.