Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Teoria dos Números

Uma possível resolução do 1º Teste — Prova A

5 de Novembro de 2004 — Duração: 30m

---

1. (0.4 valores)
Usando o princípio de indução matemática prove que

$$(1^3-1)+(2^3-2)+\cdots+(n^3-n)=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}\,, \qquad \text{para todo o } n\in\mathbb{N}\,.$$

Seja $P(n)$ a afirmação de variável natural n indicada no enunciado.

- A afirmação $P(1)$ é verdadeira porque
$$1^3-1=0=\frac{0\times 1\times 2\times 3}{4}\,.$$
- Seja $k\in\mathbb{N}$ e suponha-se que $P(k)$ é verdadeira, isto é, suponha-se que
$$(1^3-1)+(2^3-2)+\cdots+(k^3-k)=\frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4} \qquad \text{(hipótese de indução)}\,.$$
Pretende provar-se que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é, que
$$(1^3-1)+\cdots+(k^3-k)+\big[(k+1)^3-(k+1)\big]=\frac{[(k+1)-1](k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{4}\,.$$
Usando a hipótese de indução obtém-se
$$\begin{aligned}
&(1^3-1)+\cdots+(k^3-k)+[(k+1)^3-(k+1)]=\\
&\qquad=\frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4}+\big[(k+1)^3-(k+1)\big]\\
&\qquad=\frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4}+(k+1)\big[(k+1)^2-1\big]\\
&\qquad=\frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4}+(k+1)k(k+2)\\
&\qquad=k(k+1)(k+2)\left(\frac{k-1}{4}+1\right)\\
&\qquad=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}\\
&\qquad=\frac{[(k+1)-1](k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{4}\,.
\end{aligned}$$

Mostrou-se assim que $P(1)$ é uma afirmação verdadeira e que, para $k\in\mathbb{N}$, qualquer, se $P(k)$ é uma afirmação verdadeira então também o é a afirmação $P(k+1)$. O princípio de indução matemática permite concluir que a afirmação $P(n)$ é verdadeira, para todo o $n\in\mathbb{N}$.

---

2. Em cada uma das alíneas seguintes diga, sem justificar, se a afirmação feita é verdadeira ou falsa.

(a) Para quaisquer inteiros a, b e c, se $a \mid bc$ então $a \mid b$ ou $a \mid c$.

(b) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se $(a, b) = ax_0 + by_0$, com $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$, então $(x_0, y_0) = 1$.

(c) Para quaisquer inteiros a e b, primos entre si, e qualquer número primo p,

$$(ab, p) = (a, p)(b, p)\,.$$

(a) A afirmação é **falsa**. Por exemplo, $6 \mid 4 \times 3$ e 6 não divide nem 4 nem 3.

(b) A afirmação é **verdadeira** (exercício resolvido numa aula prática).

(c) A afirmação é **verdadeira**. Uma vez que $(a, b) = 1$, p não pode dividir simultaneamente a e b. Há assim 3 casos possíveis:

1. $p \nmid a$ e $p \nmid b$
   Neste caso, porque p é primo, $(a, p) = (b, p) = 1$. Ainda por p ser primo,
   $$p \nmid a \wedge p \nmid b \Rightarrow p \nmid ab \Rightarrow (ab, p) = 1\,,$$
   obtendo-se $(ab, p) = (a, p)(b, p)$.
2. $p \mid a$ e $p \nmid b$
   $p \mid a \Rightarrow p \mid ab$ e portanto $(ab, p) = p = p \times 1 = (a, p)(b, p)$.
3. $p \nmid a$ e $p \mid b$
   Este caso é análogo ao anterior.

Observação: Na pergunta 2 não é necessária qualquer justificação. A cotação (em valores) nesta pergunta é atribuída mediante o número de respostas certas e respostas erradas, de acordo com a tabela seguinte.

R. certas \ R. erradas	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0,2	0,1	0	x
2	0,4	0,3	x	x
3	0,6	x	x	x

A escolha simultânea de duas opções numa alínea faz com que a resposta seja considerada errada.