DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

1ª FREQUÊNCIA DE TEORIA DOS NÚMEROS

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

16 de Novembro de 2005 Duração: 1h30m

Não é permitido o uso de calculadoras. Justifique resumidamente todas as afirmações que efectuar. Não escreva a lápis nem a vermelho. Qualquer tentativa de fraude será punida com o anulamento da prova.

---

1. Usando o princípio de indução matemática prove que
$$1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \qquad \text{para todo o } n\in\mathbb{N}.$$
2. Calcule $(2124, 396)$ e determine, caso existam, inteiros x e y tais $2124\,x+396\,y=72$.
3. (a) Defina o conceito de número primo.
   (b) Prove que todo o natural $n>1$ é um produto de números primos.
4. Determine todos os inteiros positivos que são múltiplos de 30 e têm exactamente 12 divisores positivos.
5. Sejam $m\in\mathbb{N}$ e $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Prove que
$$ab\equiv ac\,(\mathrm{mod}\,m)\Leftrightarrow b\equiv c\left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{(a,m)}\right).$$

Cotação :	1.	4.5 valores
	2.	4 valores
	3.	4.5 valores
	4.	4 valores
	5.	3 valores