

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
2ª FREQUÊNCIA DE TEORIA DOS NÚMEROS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

21 de Dezembro de 2005

Duração: 1h30m

Não é permitido o uso de calculadoras. Justifique resumidamente todas as afirmações que efectuar. Não escreva a lápis nem a vermelho. Qualquer tentativa de fraude será punida com o anulamento da prova.

1. Determine o resto da divisão inteira de $16^{182} - 15^{121}$ por 11.

2. Seja p um número primo tal que $p \equiv 3 \pmod{4}$. Prove que

$$1^2 \times 2^2 \times \cdots \times \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

3. Usando o Teorema chinês dos resíduos determine o menor inteiro positivo, x , que verifica, simultaneamente, $x \equiv 0 \pmod{2}$, $x \equiv -1 \pmod{5}$ e $x \equiv 5 \pmod{7}$.

4. Prove que, para m, n números naturais tais que $(m, n) = 1$, se tem $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, onde φ designa a função de Euler.

5. Determine as soluções inteiras de $9x + 21y = 84$.

Cotação :

1.	3 valores
2.	3,5 valores
3.	4,5 valores
4.	4,5 valores
5.	4,5 valores