Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Teoria dos Números

Licenciatura em Matemática

24 de Janeiro de 2006 Duração: 2h30m

Não é permitido o uso de calculadoras. Justifique resumidamente todas as afirmações que efectuar. Não escreva a lápis nem a vermelho. Qualquer tentativa de fraude será punida com o anulamento da prova.

---

1. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a > 0$. Mostre que existem $q, r \in \mathbb{Z}$ verificando
$$b = aq + r \qquad \text{e} \qquad 0 \leq r < a\,.$$

2. Sejam m e k números naturais primos entre si. Prove que se mk é um quadrado perfeito então m e k são quadrados perfeitos.

3. Calcule o resto da divisão inteira de $6^{194} - 11!$ por 13.

4. Sejam a e b números naturais primos entre si. Prove que
$$a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}\,.$$

5. Sabendo que 3 é uma raíz primitiva módulo 7 determine, caso existam, todas as soluções de $x^8 \equiv 4 \pmod 7$.

6. Determine todos os números naturais que terminam em 00, têm exactamente 18 divisores positivos e para os quais o valor da função de Euler é 480.

7. Determine todas soluções inteiras de $12\,x + 16\,y = 96$.

Cotação :	1.	3 valores
	2.	2.5 valores
	3.	2 valores
	4.	2.5 valores
	5.	3.5 valores
	6.	3 valores
	7.	3.5 valores