Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Teoria dos Números

Uma possível resolução do Exame de Recurso

10 de Fevereiro de 2006

---

1. (2,5 valores)
Uma vez que $(a, b) = 1$, existem inteiros x e y tais que $1 = ax + by$. Multiplicando ambos os membros desta igualdade por c obtém-se

$$c = cax + cby\,. \tag{1}$$

Por outro lado, a e b são divisores de c, isto é, existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $c = ar$ e $c = bs$. Substituindo c por bs na primeira parcela do segundo membro de (1) e por ar na segunda parcela da mesma soma obtém-se $c = bsax + arby = ab(sx + ry)$. Desta igualdade, porque $sx + ry$ é um inteiro, conclui-se que $ab \mid c$.

---

2. (3 valores)
Suponha-se que $a \mid b$ e prove-se que $\alpha_i \leq \beta_i$, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Uma vez que $a \mid b$ e a e b são positivos, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $b = aq$. Além disso, de $q \mid b$ conclui-se que qualquer número primo que divida q é também um divisor de b. Assim, q pode ser escrito na forma $q = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_k^{\gamma_k}$, com $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{N}_0$. Então,

$$\begin{aligned} b = aq \quad &\Leftrightarrow \quad p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k})\,(p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_k^{\gamma_k}) \\ &\Leftrightarrow \quad p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} = p_1^{\alpha_1+\gamma_1} p_2^{\alpha_2+\gamma_2} \cdots p_k^{\alpha_k+\gamma_k} \end{aligned} \tag{2}$$

Como os números primos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são distintos dois a dois, de (2) resulta que, para $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$\beta_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i + \gamma_i = 0\,.$$

Eliminando em (2) as potências de expoente zero e aplicando o Teorema Fundamental da Aritmética obtém-se que, para $i = 1, 2, \ldots, k$ tal que $\beta_i \neq 0$, $\beta_i = \alpha_i + \gamma_i$.

Assim, $\alpha_i + \gamma_i = \beta_i$, para $i = 1, 2, \ldots, k$, concluindo-se, porque $\gamma_i \in \mathbb{N}_0$, que $\alpha_i \leq \beta_i$, para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Suponha-se agora que $\alpha_i \leq \beta_i$, para $i = 1, 2, \ldots, k$ e prove-se que $a \mid b$. Para $i = 1, 2, \ldots, k$, e uma vez que $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0$ com $\alpha_i \leq \beta_i$, a diferença $\beta_i - \alpha_i$ é também um natural ou zero. Assim $c = p_1^{\beta_1-\alpha_1} p_2^{\beta_2-\alpha_2} \cdots p_k^{\beta_k-\alpha_k}$ é um número natural. De

$$ac = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) \left(p_1^{\beta_1-\alpha_1} p_2^{\beta_2-\alpha_2} \cdots p_k^{\beta_k-\alpha_k}\right) = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} = b\,,$$

conclui-se que $a \mid b$.

---

3. (2,5 valores)
Uma vez que $(7,10) = (13,10) = 1$ e $\varphi(10) = \varphi(2)\varphi(5) = 4$, aplicando o Teorema de Euler, obtém-se que $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$ e $13^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Assim, para qualquer natural n, $7^{8n} = (7^4)^{2n} \equiv 1^{2n} \pmod{10} \equiv 1 \pmod{10}$ e $13^{4n} = (13^4)^n \equiv 1^n \pmod{10} \equiv 1 \pmod{10}$, obtendo-se que $2(7^{8n}+1)13^{4n} \equiv 2\times(1+1)\times 1 \pmod{10} \equiv 4 \pmod{10}$. Então, para qualquer número natural n, o último dígito de $2(7^{8n}+1)13^{4n}$ é 4.

---

4. (2,5 valores)
Atendendo a que $(12,27) = 3$ e $3 \mid 21$ existem exactamente 3 classes de congruência módulo 21 cujos elementos verificam a congruência dada. De

$$12\,x \equiv 21 \pmod{27} \Leftrightarrow 4\,x \equiv 7 \pmod 9$$

e, uma vez que $7 = 7 \times 1 = 7 \times (4,9) = 7 \times (9 - 2\times 4) = 7\times 9 - 14 \times 4$, conclui-se que -14 é uma solução de $4\,x \equiv 7 \pmod 9$. Então

$$\begin{aligned} 12\,x \equiv 21 \pmod{27} &\Leftrightarrow 4\,x \equiv 7 \pmod 9 \\ &\Leftrightarrow x \equiv -14 \pmod 9 \\ &\Leftrightarrow x \equiv 4 \pmod 9 \\ &\Leftrightarrow x \equiv 4 \pmod{27} \vee x \equiv 13 \pmod{27} \vee x \equiv 22 \pmod{27}. \end{aligned}$$

---

5. (3,5 valores)
Uma vez que 3, 5 e 8 são primos dois a dois, o Teorema chinês dos resíduos garante que o sistema

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 8 \end{cases} \tag{3}$$

tem solução, sendo o conjunto das soluções uma classe de congruência módulo $3 \times 5 \times 8 = 120$. Resolvam-se as congruências auxiliares $\frac{120}{3}\,b_1 \equiv 1 \pmod 3$, $\frac{120}{5}\,b_2 \equiv 1 \pmod 5$ e $\frac{120}{8}\,b_3 \equiv 1 \pmod 8$.

$\frac{120}{3}\,b_1 \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow 40b_1 \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow b_1 \equiv 1 \pmod 3$.

$\frac{120}{5}\,b_2 \equiv 1 \pmod 5 \Leftrightarrow 24b_2 \equiv 1 \pmod 5 \Leftrightarrow -b_2 \equiv 1 \pmod 5 \Leftrightarrow b_2 \equiv -1 \pmod 5$.

$\frac{120}{8}\,b_3 \equiv 1 \pmod 8 \Leftrightarrow 15b_3 \equiv 1 \pmod 8 \Leftrightarrow -b_3 \equiv 1 \pmod 8 \Leftrightarrow b_3 \equiv -1 \pmod 8$.

Considerem-se $b_1 = 1$, $b_2 = -1$ e $b_3 = -1$.

Então $1 \times \frac{120}{3}\,b_1 + 4 \times \frac{120}{5}\,b_2 + 2 \times \frac{120}{8}\,b_3 = 40 + 4 \times 24 \times (-1) + 2 \times 15 \times (-1) = -86$ é uma solução de (3) e (Teorema chinês dos resíduos) o conjunto das soluções de (3) é $[-86]_{120}$. Assim, os inteiros entre -100 e 200 que são soluções de (3) são -86, -86+120=34 e 34+120=154.

---

6. (2,5 valores)
Para n natural, $\varphi(n)$ é o número de números naturais que são inferiores ou iguais a n e

primos com n. Então $\varphi(n)$ é um número natural inferior ou igual a n e portanto é um dos factores de

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1\,,$$

donde resulta que $\varphi(n) \mid n!$.

---

7. (3,5 valores)
Designem-se por x, y e z as medidas dos lados de um triângulo rectângulo nas condições do enunciado, sendo x e y as medidas dos catetos e z a medida da hipotenusa. Então (x, y, z) é um trio pitagórico primitivo e portanto x é par ou y é par. Suponha-se que y é par. Então $x = 15$ e existem $a, b \in \mathbb{N}$ primos entre si e de paridades distintas, tais que $a > b$, $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$ e $z = a^2 + b^2$.

De $15 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ obtém-se, porque $a-b$ e $a+b$ são positivos e $a-b < a+b$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=15 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=3 \\ a+b=5 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=1+b \\ 1+2b=15 \end{cases} \vee \begin{cases} a=3+b \\ 3+2b=5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=8 \\ b=7 \end{cases} \vee \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Observe-se que a e b nestas condições são de facto de paridades diferentes e $(a, b) = 1$. Então há dois triângulos rectângulos satisfazendo as condições do enunciado, que são os triângulos cujas medidas dos lados são

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 2 \times 8 \times 7 = 112 \\ z = 8^2 + 7^2 = 113 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 15 \\ y = 2 \times 4 \times 1 = 8 \\ z = 4^2 + 1^2 = 17 \end{cases} .$$
