

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA  
EXAME DE RECURSO DE TEORIA DOS NÚMEROS  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

10 de Fevereiro de 2006

Duração: 2h30m

---

Não é permitido o uso de calculadoras. Justifique resumidamente todas as afirmações que efectuar. Não escreva a lápis nem a vermelho. Qualquer tentativa de fraude será punida com o anulamento da prova.

---

1. Sejam  $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Prove que se  $a$  e  $b$  são divisores de  $c$ , primos entre si, então  $ab \mid c$ .
2. Sejam  $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$  e  $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, p_2, \dots, p_k$  são números primos distintos dois a dois e  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Mostre que

$$a \mid b \Leftrightarrow (\alpha_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, k).$$

3. Para  $n \in \mathbb{N}$ , determine o último dígito de  $2(7^{8n} + 1)13^{4n}$ .
4. Resolva a congruência  $12x \equiv 21 \pmod{27}$ .
5. Usando o Teorema chinês dos resíduos determine todos os inteiros entre  $-100$  e  $200$  que verificam, simultaneamente,  $x \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $x \equiv 4 \pmod{5}$  e  $x \equiv 2 \pmod{8}$ .
6. Prove que  $\varphi(n) \mid n!$ , para todo o natural  $n$ .
7. Determine as medidas dos lados de todos os triângulos rectângulos cujos lados têm como medidas (em centímetros) números naturais primos entre si e em que um dos catetos mede 15 cm.

---

	1.	2.5 valores
	2.	3 valores
	3.	2.5 valores
Cotação :	4.	2.5 valores
	5.	3.5 valores
	6.	2.5 valores
	7.	3.5 valores