Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Primeira Frequência de Teoria dos Números

Licenciatura em Matemática

8 de Novembro de 2006 Duração 1h30

Nota: Não é permitido o uso de calculadoras. Justifique resumidamente as afirmações que efectuar.

1. Use o princípio da indução matemática para provar que, para todo o n natural,

$$8|(3^{2n}-1).$$

2. (a) Calcule $(1485, 1745)$ e $[1485, 1745]$.

   (b) Determine inteiros x e y tais que $1485x + 1745y = 10$.

3. (a) Defina o conceito de número primo.

   (b) Prove que existe uma infinidade de números primos.

4. Determine o resto da divisão inteira de

$$5^{19} + 38^{201}, \quad \text{por } 13.$$

5. (a) Sejam m um número natural e a, b, c inteiros. Prove que

$$ab \equiv ac \pmod{m} \Leftrightarrow b \equiv c \left(\operatorname{mod} \frac{m}{(a,m)}\right).$$

   (b) Conclua de (a) que, se p é um número primo tal que $p \nmid a$,

$$ab \equiv ac \pmod{p} \Leftrightarrow b \equiv c \pmod{p}.$$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Segunda Frequência de Teoria dos Números
Licenciatura em Matemática

19 de Dezembro de 2006 Duração 1h30

Nota: Não é permitido o uso de calculadoras. Justifique resumidamente as afirmações que efectuar.

1. Usando o teorema chinês dos resíduos, determine o menor inteiro positivo x que verifica simultaneamente $x \equiv -1 \pmod 3$, $x \equiv 3 \pmod 5$ e $x \equiv 2 \pmod 7$.

2. Sabendo que 2 é uma raiz primitiva módulo 13, resolva a congruência
$$x^4 \equiv 1 \pmod{13}.$$

3. (a) Defina a função de Euler φ.
   (b) Mostre que, para n natural, $\varphi(5n) = 5\varphi(n)$ se e só se n é divisível por 5.
   (c) Dê um exemplo de um número natural $n \neq 5$ que verifique a alínea anterior.

4. Mostre que se p é um número primo tal que $p \equiv 3 \pmod 4$, então
$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv \pm 1 \pmod p.$$

5. Determine todas as soluções inteiras da equação linear diofantina $10x - 8y = 42$.