

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
EXAME DE TEORIA DOS NÚMEROS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

24 de Janeiro de 2007

Duração 2h30

Observação: Não é permitido o uso de calculadoras. Justifique resumidamente as afirmações que efectuar.

1. Use o princípio da indução matemática para mostrar que, para todo o natural n , $10|(5^n - 5)$.
2. Mostre que a função aritmética σ é multiplicativa.
Nota: $\sigma(n)$ denota a soma de todos os divisores positivos de n .
3. Determine o último dígito de $2^{2007} + 4^{2007} + 5^{2007} + 6^{2007} + 8^{2007}$.
4. Usando o teorema chinês dos resíduos, determine o maior inteiro negativo x que verifica simultaneamente $x \equiv -1 \pmod{3}$, $x \equiv 1 \pmod{4}$ e $x \equiv -2 \pmod{5}$.
5. Seja m um número natural.
 - (a) Defina sistema reduzido de resíduos módulo m .
 - (b) Defina raiz primitiva módulo m .
 - (c) Sabendo que 5 é uma raiz primitiva módulo 17, resolva a congruência

$$x^{10} \equiv 1 \pmod{17}.$$

6. Sejam a, p e r números naturais, com p primo, e k um inteiro não negativo tal que $(a, p^{k+1}) = p^k$. Mostre que

$$\sigma(p^r a) = p^{k+1} \sigma(p^{r-1}) \sigma\left(\frac{a}{p^k}\right) + \sigma(a).$$

7. Determine todas as soluções inteiras da equação linear diofantina $341x + 527y = -31$.