Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Teoria dos Números

Licenciatura em Matemática

5 de Janeiro de 2009 Duração 2h30

Observação: Não é permitido o uso de calculadoras. Justifique resumidamente as afirmações que efectuar.

1. Use o princípio da indução matemática para provar que, para todo o n natural,

$$10|(6^{2n}-6).$$

2. (a) Seja m um número natural. Defina sistema reduzido de resíduos módulo m.

   (b) Enuncie e demonstre o teorema de Euler.

   (c) Tendo em conta a alínea anterior, mostre que $a^p \equiv a \pmod{p}$ para todo o inteiro a e primo p.

3. (a) Sejam a, b inteiros e m_1, m_2 números naturais. Prove que $a \equiv b \pmod{m_1}$ e $a \equiv b \pmod{m_2}$ se e só se $a \equiv b \pmod{[m_1, m_2]}$.

   (b) Mostre que $a^{561} \equiv a \pmod{33}$ para todo o inteiro a.

4. Resolva o sistema de congruências

$$3x \equiv 6 \pmod{12}, \; 2x \equiv 5 \pmod{7}.$$

5. (a) Prove que se a, b, e c são inteiros tais que $a|b.c$ e $(a,b)=1$ então $a|c$.

   (b) Mostre que se n é um número natural e p é um primo tal que $n < p \leq 2n$, então

$$\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{p}.$$

6. Resolva a equação linear diofantina $527x + 341y = 62$.

7. Se a transformação cifradora for $x \to 3x+1 \pmod{26}$, decifre NJINA.

   (Nota: Considera-se o alfabeto latino com 26 letras

   A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z.)