Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Frequência de Teoria dos Números
Licenciatura em Matemática

4 de Dezembro de 2008

Observação: Não é permitido o uso de calculadoras. Justifique resumidamente as afirmações que efectuar.

1. Prove que existe uma infinidade de números primos.

2. (a) Enuncie o teorema de Euler.

   (b) Determine o último dígito de $2^{2009} + 3^{2009} + 8^{2009}$.

3. Calcule o resto da divisão inteira de $17! - 21^{2000}$ por 19.

4. (a) Sejam m um número natural e a, b, c inteiros. Prove que

$$ab \equiv ac \pmod{m} \Leftrightarrow b \equiv c \left(\bmod \frac{m}{(a,m)}\right).$$

   (b) Determine todas as soluções da congruência $10x \equiv 6 \pmod{14}$.

5. Determine o maior inteiro negativo x que verifica simultaneamente $x \equiv -1 \pmod{3}$, $x \equiv -2 \pmod{5}$ e $x \equiv 2 \pmod{7}$.

6. Sejam a, p e r números naturais, com p primo, e k um inteiro não negativo tal que $(a, p^{k+1}) = p^k$. Mostre que

$$\sigma(p^r a) = p^{k+1}\sigma(p^{r-1})\sigma\left(\frac{a}{p^k}\right) + \sigma(a).$$