Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Frequência de Teoria dos Números
Licenciatura em Matemática

11 de Dezembro de 2009 Duração 1h30

Observação: Não é permitido o uso de calculadoras. Justifique resumidamente as afirmações que efectuar.

1. (a) Sejam a e b números naturais, e p um número primo tais que $a, b < p$. Mostre que $(ab, p) = 1$.
   (b) Prove que existe uma infinidade de números primos.

2. Determine o menor inteiro positivo talque $\tau(n) = 6$.

3. (a) Defina a função de Euler. Determine o número de inteiros positivos, inferiores a 100, que são primos com 100.
   (b) Enuncie o teorema de Euler.
   (c) Determine o último dígito de $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9! + 10! + 7^{4001}$.

4. (a) Sejam a, b inteiros e m_1, m_2 números naturais. Prove que $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\ m_1)$ e $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\ m_2)$ se e só se $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\ [m_1, m_2])$.
   (b) Determine todas as soluções da congruência $13x \equiv 71 \ (\mathrm{mod}\, 20)$.

5. (a) Prove que se a, b, e c são inteiros tais que $a|b.c$ e $(a, b) = 1$ então $a|c$.
   (b) Mostre que se n é um número natural e p é um primo tal que $n < p \leq 2n$, então
$$\binom{2n}{n} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p).$$