Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Teoria dos Números
Licenciatura em Matemática

3 de Janeiro de 2011 Duração 2h30

Observação: Não é permitido o uso de calculadoras. Justifique resumidamente as afirmações que efectuar.

1. (a) Mostre que todo o número natural > 1 é um produto de números primos.
   (b) Seja p um primo tal que $p > 1119$. Mostre que $(p, 1119!) = 1$.
2. (a) Seja m um número natural. Defina sistema reduzido de resíduos módulo m.
   (b) Mostre que se $\{r_1, \ldots, r_{\varphi(m)}\}$ é um sistema reduzido de resíduos módulo m, e a é um inteiro tal que $(a, m) = 1$, então $\{ar_1, \ldots, ar_{\varphi(m)}\}$ é também um sistema reduzido de resíduos módulo m.
   (c) Enuncie e demonstre o teorema de Euler.
   (d) Determine os dois últimos dígitos de 3^{1492}.
3. (a) Mostre que se $(a, m) = 1$ então as soluções da congruência linear $ax \equiv b \pmod{m}$ formam uma só classe de congruência mod m.
   (b) Resolva o sistema de congruências
   $$x \equiv 3 \pmod{4},\ 13x \equiv 71 (\mathrm{mod}\, 5),\ 13x \equiv 14 (\mathrm{mod}\, 19).$$
4. Sejam a e n números naturais tais que $n \geq 2$ e $(a, n) = 1$. Mostre que
   $$a^{n-1} + (n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$$
   se e somente se n é primo.
5. Determine todas as soluções inteiras da equação linear diofantina $171x + 78y = -3$.
6. Determine os lados dos triângulos rectângulos, de lados inteiros e primos entre si, para os quais a área e o perímetro são, respectivamente, n cm^2 e n cm, para algum natural n.