Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Frequência de Teoria dos Números
Licenciatura em Matemática

10 de Dezembro de 2010 — Duração 1h30

Observação: Não é permitido o uso de calculadoras. Justifique resumidamente as afirmações que efectuar.

1. (a) Sejam a um número natural, e p um número primo tais que $a < p$. Mostre que $(a!, p) = 1$.
   (b) Prove que existe uma infinidade de números primos.

2. (a) Defina a função de Euler φ. Determine o número de inteiros positivos, inferiores a 300, que são primos com 100.
   (b) Sendo m e k números naturais, mostre que o número de naturais $\leq mk$ que são primos com m é igual a $k\varphi(m)$.
   (c) Enuncie o teorema de Euler.
   (d) Seja n um número inteiro. Mostre que 33×17 divide $n^{561} - n$.

3. (a) Sejam m um número natural e a, b, c inteiros. Prove que
$$ab \equiv ac \pmod{m} \Leftrightarrow b \equiv c \left(\operatorname{mod} \frac{m}{(a,m)}\right).$$
   (b) Determine as soluções distintas $\operatorname{mod} 28$ da congruência $20x \equiv 12 \pmod{28}$.

4. (a) Prove que se a, b, e c são inteiros tais que $a|b.c$ e $(a,b) = 1$ então $a|c$.
   (b) Mostre que se $a < m$ são números naturais tais que $(a,m) = 1$, então
$$\binom{m}{a} \equiv 0 \pmod{m}.$$