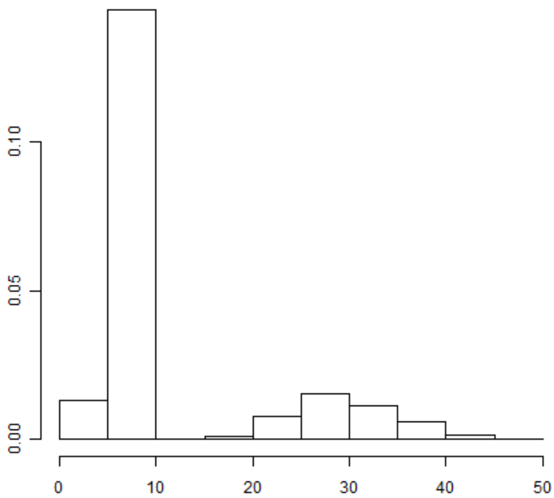
Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra
Exame de Teoria do Risco (época normal) – 2010/11

13/06/11 tempo: 2h30m

Atenção: Justifique todas as suas respostas.

1. Dispomos de uma amostra de 900 indemnizações, expressas em centenas de euros, descritas por uma variável X, de que se mostra o histograma ao lado. Desta amostra conhecemos os seguintes valores da amostra: média igual a 15.378, variância igual 70.022, média dos quadrados dos elementos da amostra igual 306.42 e existem 708 observações inferiores ou iguais a 15. Para construir um modelo para X admite-se que, com probabilidade 0.2, a variável se comporta como uma distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda > 0$ e, com probabilidade 0.8, se composta como um distribuição binomial com parâmetros $(15, p)$.



   (a) As hipótese sobre a distribuição de X parecem-lhe razoáveis ? Porquê ?

   (b) Caracterize a função geradora de momentos de X.

   (c) Calcule, em função dos parâmetros λ e p, $\mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$. (Caso não consiga resolver esta alínea e necessite destes valores na seguinte, admita que $\mathrm{E}(X) = 2\lambda + .8p$ e $\mathrm{Var}(X) = 3\lambda^2 - p^2 + 2\lambda + .8p$.)

   (d) Construa aproximações para λ e p.

   (e) Para calcular o prémio a pagar por este seguro utiliza-se para função de utilidade $u(x) = -e^{-10x}$. O valor do bem a segurar é 70 000 euros. Indique uma expressão para o valor que o contratante estaria disposto a pagar. (Caso não tenha resolvido a alínea anterior admita, caso necessite destas aproximações, que $\lambda = 18$ e $p = .34$.)

2. Um risco X tem distribuição exponencial com parâmetro $\theta > 0$. Este parâmetro θ é aleatório e, se representemos por Θ a variável aleatória que descreve o comportamento do parâmetro que caracteriza a distribuição de X, Θ tem distribuição exponencial inversa.

   (a) Mostre que a função de distribuição de Θ pode ser representada na forma $F_\Theta(\theta) = e^{-\gamma/\theta}$, onde $\gamma > 0$ é um parâmetro de escala.

   (b) Mostre que $\mathrm{P}(X \leq x) = 1 - \dfrac{\gamma}{x + \gamma}$, para $x > 0$.

   (c) Dispomos de uma amostra com 550 observações para a variável X e pretende-se obter uma aproximação para γ. Da amostra sabemos que tem média igual a 0.1697859, variância igual a 0.0334573 e que os seguintes percentis são descritos na tabela:

q_0	$q_{0.25}$	$q_{0.50}$	$q_{0.75}$	$q_{1.0}$
0.0002215754	0.0459235140	0.1114007040	0.2187098206	1.2096616791

   Qual a aproximação que sugere para γ ? (Caso não responda a esta alínea e necessite desta aproximação para a seguinte, admite que $\gamma \approx 7.1$.)

   (d) Se a companhia de seguros tiver uma carteira com 20 000 apólices cujo risco é descrito por X e pretender operar com coeficiente de segurança 0.1, qual o prémio por apólice a cobrar para que a probabilidade de falir no prazo de vigência destas apólices seja igual a 0.05 ?

3. Considere dois riscos independentes X_1 e X_2 cujas distribuições são descritas na tabela seguinte:

	0	5	10	15	20
X_1	0.80	0.08	0.12	0.00	0.00
X_2	0.70	0.09	0.03	0.17	0.01

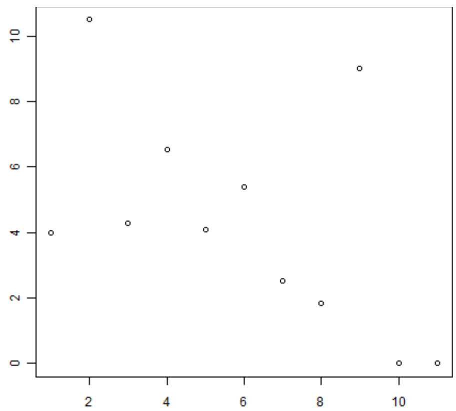
Estes riscos vão ser re-segurados com contratos do tipo Stop-Loss retenções $d_1 = 7$ para X_1 e $d_2 = 13$ para X_2.

(a) Descreva a distribuição do risco agregado após o contrato de re-seguro.

(b) A re-seguradora cobra 0.02 por unidade de risco médio que fica a seu cargo. Representemos por T a despesa da companhia de seguros. Calcule $\mathrm{VaR}_{0.95}(T)$.

4. Uma apólice de seguros cobre um risco que tem duas componentes cujos valores são aleatórios e independentes um do outro. Se representarmos por X uma das componentes destes risco e por Y a outra, as distribuições destas componentes são:

	1	2	3	4
X	0.2	0	0.7	0.1
Y	0.2	0.8	0	0



Havendo um pedido de indemnização, o valor desta é, portanto obtido pela soma das duas componentes do risco. A companhia seguradora vende várias destas apólices e representamos por S o risco coletivo correspondente. Uma observação sobre o número de pedidos de indemnização provenientes de 200 carteiras de apólices deste tipo forneceu as seguintes observações:

no. de pedidos (k)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
no. de carteiras (n_k)	1	4	21	30	49	40	36	13	3	3	0

A representação gráfica dos valores kn_k/n_{k-1} é a que mostra na figura acima.

(a) A companhia acredita que o número de pedidos de indemnização apresentados tem distribuição binomial. Concorda? Porquê?

(b) A média e variância da amostra correspondente ao número de pedidos observados em 200 carteiras são 4.45, 2.761307, respetivamente. Indique uma aproximação para os parâmetros da distribuição binomial que deve ser considerada. (Caso não responda a esta alínea admita, no que se segue, que $n = 12$ e $p = .23$.)

(c) Caracterize $\mathrm{E}(S)$ e $\mathrm{Var}(S)$.

(d) Obtenha um aproximação para $\mathrm{VaR}_{0.95}(S)$.

(e) Calcule $\mathrm{P}(S \leq 4)$.