Um risco X é da forma $X = \alpha + Y$, onde $\alpha > 0$ é desconhecido e Y tem distribuição exponencial de parâmetro θ, também desconhecido. Dispomos de 800 registos, $x_1, \ldots, x_{800}$, de indemnizações geradas por apólices que cobrem este risco e pretende-se encontrar aproximações para os dois parâmetros (α, θ) que caracterizam esta distribuição. Conhecem-se os seguintes dados da amostra: média da amostra igual a 32.033, variância da amostra igual a 398.558. Conhecem-se ainda alguns percentis:

$q_{0.0}$	$q_{0.25}$	$q_{0.50}$	$q_{0.75}$	$q_{1.00}$
12.001	17.480	25.342	41.067	141.059

1. Mostre que uma parametrização possível para esta distribuição é:

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\theta}\right) \mathbb{I}_{[\alpha,+\infty)}(x) \qquad \text{ou} \qquad F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\theta}\right), \text{ se } x \geq \alpha$$

   onde f representa a função densidade e F a função de distribuição.

2. O parâmetro θ é de escala?

3. Mostre que $\mathrm{E}(X) = \alpha + \theta$ e $\mathrm{Var}(X) = \theta^2$.

4. Utilize o método dos momentos para obter aproximações para (α, θ).

5. Utilize o métodos dos quantis para obter aproximações para (α, θ).

6. Dispõe de uma carteira 1000 apólices deste tipo e representamos por S o risco individual que lhe está associado. Utilizando a aproximação para os parâmetros que lhe parece mais adequada, encontre uma aproximação para $\mathrm{VaR}_{0.95}(S)$.

Prazo de entrega: 17 de Maio de 2011
paulo@mat.uc.pt