Elementos de Toplogia
Exame Modelo 1B - 2002/2003

Duração: 2h 30m

1) Para cada um dos seguintes subconjuntos de R, indique quais são abertos e quais são fechados:

a) $\mathbb{Q}$ b) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$ c) $\{1,3,5\}$ d) $\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$

2) Seja (Y,τ) um expaço topológico qualquer. Seja $X\subset Y$ e seja X denso em Y. Prove que $\operatorname{int}(Y\setminus X)=\phi$.

3) Dê um exemplo de uma família de intervalos abertos centrados nos racionais do intervalo $[a,b]$, mas que não constitua uma cobertura aberta de $[a,b]$.

4) a) Mostre que os conjuntos $[a,b]$ e $]c,d]$ são conexos;
b) Dê exemplo de um subconjunto de R desconexo;
c) Mostre que os intervalos $[a,b]$ e $]c,d]$ não são homeomorfos, usando a noção de conjunto conexo.

5) Seja $(B_x)_{x\in X}$ uma família de sistemas fundamentais de vizinhanças do espaço topológico (X,τ). Prove que se A é um subconjunto de X então

$$\operatorname{int}(A)=\{x\in X|(\exists B\in B_x)B\subset A\}$$

6) Dos conjuntos seguintes indique quais são conexos e quais são conexos por arcos:

a) $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $n\geq 1$ b) $\{(x,y)\in R^2|2\leq x^2+y^2<4\}$

7) Prove que uma função contínua não é necessariamente aberta.

8) Prove que $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ é contínua se e somente se para todo o fechado F em τ' se tem que $f^{-1}(F)$ é fechado em (X,τ).

9) Prove que todo o subespaço fechado de um conjunto compacto é compacto.

10) Aplicando o Teorema do Ponto de Fixo de Banach, prove que a equação $\sqrt{2+\sqrt{x}}=x$ tem uma e uma só solução em $[1,+\infty[$.