Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

28/01/2004 **Elementos de Topologia – Exame (Parte I)** **1h10m**

Licenciatura em Matemática

(3.0) **1.** Seja X um conjunto não-vazio.

(a) Defina topologia $\mathcal{T}$ sobre X.

(b) Dê uma definição de métricas topologicamente equivalentes sobre X.

(c) Enuncie o teorema do ponto fixo de Banach.

(4.0) **2.** Indique, **justificando**, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) No espaço métrico (X, δ), onde δ é a distância discreta, todos o subconjunto de X é aberto.

(b) Uma aplicação contínua entre os espaços topológicos $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(X, \mathcal{T}_2)$ é necessariamente aberta.

(c) A equação $\sqrt{2+\sqrt{x}} = x$ tem uma e uma só solução em $[1, +\infty[$.

(d) O conjunto $\mathcal{B} = \{U \subset \mathbb{R} \colon \mathbb{R} \setminus U$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{Z}\}$ é base para uma topologia sobre $\mathbb{R}$.

(3.0) **3.** Considere a função $\ell \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com expressão analítica

$$\ell((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & , \ x_1 = x_2 \\ |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2| & , \ x_1 \neq x_2 . \end{cases}$$

(a) Mostre que ℓ é uma métrica em $\mathbb{R}^2$.

(b) Para $\boldsymbol{x} = (0, 2)$ determine $B_1(\boldsymbol{x})$ e $B_3(\boldsymbol{x})$ e identifique-os geometricamente.

(c) Verifique se a sucessão $(1/n, 1/n)$ é de Cauchy em $(\mathbb{R}^2, \ell)$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

28/01/2004 **Elementos de Topologia – Exame (Parte II)** **1h10m**

Licenciatura em Matemática

(3.0) **4.** Sejam $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ espaços topológicos.

(a) Defina imersão, $f\colon X \to Y$.

(b) Defina sucessão convergente no espaço topológico $(X, \mathcal{T}_1)$.

(c) Estabeleça o teorema de Weierstrass para funções contínuas entre os espaços topológicos dados.

(4.0) **5.** Indique, **justificando**, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico de Hausdorff. Se a sucessão $(x_n) \subset X$ tiver limite, então o limite é único.

(b) O espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é conexo, para toda a topologia $\mathcal{T}$.

(c) Se o espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é conexo por caminhos, então é conexo.

(d) A aplicação $f\colon [0, 2\pi[\to S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 = 1\}$, com expressão analítica $f(t) = (\cos t, \sin t)$ é um homeomorfismo.

(3.0) **6.** Seja $X = \mathbb{N} \cup \{a, b\}$, com $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ e $a \neq b$. Pode ver-se que o conjunto

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{X \setminus A \colon A \text{ é finito}\}$$

é uma topologia, onde $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é o conjunto das partes de $\mathbb{N}$.

(a) Mostre que $(X, \mathcal{T})$ é um espaço compacto que não é de Hausdorff.

(b) Dê um exemplo de um subespaço de $(X, \mathcal{T})$ que é de Hausdorff, mas não é compacto.

(c) Verifique que $(X, \mathcal{T})$ é desconexo.
