Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

12/02/2004 **Elementos de Topologia – Exame (Parte I)** **1h10m**

Licenciatura em Matemática

(3.0) **1.** Seja X um conjunto não-vazio.

(a) Defina base, $\mathcal{B}$, de uma topologia sobre X.

(b) Defina a topologia gerada por uma base, e mostre que é realmente uma topologia.

(c) Defina ponto de acumulação de um subconjunto A, do espaço topológico $(X, \mathcal{T})$.

(4.0) **2.** Indique, **justificando**, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) A topologia induzida no conjunto $A = \{1/n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ pela topologia usual em $\mathbb{R}$, é a topologia discreta.

(b) Em $\mathbb{R}$ a topologia usual é mais fina do que a topologia co-finita.

(c) A função $f\colon [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ de expressão analítica $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$ é uma contracção.

(d) Uma sucessão de Cauchy num espaço métrico é convergente.

(3.0) **3.** Considere o conjunto $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset\,, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,,\ \ a \in \mathbb{R}\}$.

(a) Mostre que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ é um espaço topológico.

(b) Calcule o interior, a aderência e o derivado do conjunto

$$A = [0, 1[\cup \{2\}$$

como subconjunto dos espaços topológicos $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$, onde $\mathcal{T}_2$ é a topologia usual.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

12/02/2004 **Elementos de Topologia – Exame (Parte II)** **1h10m**

Licenciatura em Matemática

(3.0) 4. Sejam $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ espaços topológicos.

(a) Defina espaço topológico conexo $(X, \mathcal{T}_1)$.

(b) Mostre que:

Se $(X, \mathcal{T}_1)$ é uma espaço topológico conexo e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua, então $f(X)$ é conexo.

(c) Comente:

Uma aplicação contínua, f, entre os espaços topológicos $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ é um homeomorfismo, quando e só quando f é bijectiva.

(4.0) 5. Indique, **justificando**, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) As vogais **A** e **E** são homeomorfas.

(b) O conjunto $S = \{(x, \sin(1/x)),\ \ x > 0\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ é conexo.

(c) Num espaço de Hausdorff todo o fechado é compacto.

(d) A união finita de conjuntos compactos é um conjunto compacto.

(3.0) 6. Considere o espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ onde $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[,\ \ a \in \mathbb{R}\}$.

(a) Mostre que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ não é de Hausdorff, mas é conexo.

(b) Justifique que não existe uma métrica sobre $\mathbb{R}$ que induza a topologia $\mathcal{T}$.

(c) Verifique se a sucessão de termo geral, $u_n = n$, é convergente em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.