Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

29/10/2003 **Elementos de Topologia – Teste (Parte I)** **1h15m**

Licenciatura em Matemática

(3.0) **1.** Considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = 1 - 1/n\,,\ n \in \mathbb{Z}^+\} \cup]-2\,, -1[\,.$$

Determine os conjuntos interior, aderência, derivado e fronteira de A, considerando A como subconjunto do espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, onde $\mathcal{T}$ é a topologia:

(a) usual;

(b) co-finita.

(5.0) **2.** Seja $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\delta(0) = 0$ e $\delta(x) = 1\,,\ x \neq 0$. Considere a função $\mathbf{d} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de expressão analítica

$$\mathbf{d}\left((x_1, y_1)\,, (x_2, y_2)\right) = \delta(x_1 - x_2) + |y_1 - y_2|\,.$$

(a) Mostre que $\mathbf{d}$ define uma métrica em $\mathbb{R}^2$.

(b) Considere o ponto $\boldsymbol{x} = (0, 1)$. Identifique os conjuntos $B_1(\boldsymbol{x})$ e $B_2(\boldsymbol{x})$, na métrica $\mathbf{d}$.

(c) Comente a frase:

Os espaços topológicos $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ e $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathbf{d}})$, onde $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ são as topologias usual e induzida sobre $\mathbb{R}^2$ pela métrica $\mathbf{d}$, são topologicamente equivalentes.

(d) Verifique se a sucessão de termo geral $\boldsymbol{x}_n = (1/n\,, 1/n)$, é de Cauchy no espaço métrico $(\mathbb{R}^2, \mathbf{d})$.

(e) Mostre que $\mathcal{B} = \{\{x\} \times]a, b[\,: x, a, b \in \mathbb{R}\}$ é uma base da topologia induzida por $\mathbf{d}$, $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$.

(2.0) **3.** Considere os espaços topológicos $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(X, \mathcal{T}_2)$ e a função identidade entre estes espaços, f. Mostre que f é contínua quando e só quando $\mathcal{T}_1$ é mais fina que $\mathcal{T}_2$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

17/12/2003 **Elementos de Topologia – Teste (Parte II)** **1h15m**

Licenciatura em Matemática

(3.0) **4.** Sejam $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ espaços topológicos.

(a) Defina homeomorfismo, $f\colon X \to Y$.

(b) Defina sucessão convergente no espaço topológico $(X, \mathcal{T}_1)$.

(c) Estabeleça o teorema dos valores intermédios para funções contínuas entre os espaços topológicos dados.

(4.0) **5.** Indique, **justificando**, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) Se K é um subconjunto compacto do espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, então $K \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$ é compacto, onde $x_1, \ldots, x_n$ é um qualquer n-uplo de elementos de X.

(b) As componentes conexas de um espaço topológico são conjuntos fechados.

(c) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_1)$ com $n > 1$ é homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$, onde $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ são as topologias usuais.

(d) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ para alguma topologia $\mathcal{T}$.

(3.0) **6.** Considere o espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ onde

$$\mathcal{T} = \{]-a, a[: a \in \mathbb{R}^+\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}.$$

(a) Dê um exemplo de um subconjunto não trivial de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ que seja compacto e outro que não seja compacto.

(b) Verifique se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é conexo ou de Hausdorff.

(c) Mostre que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ verifica o segundo axioma da numerabilidade.
