Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Topologia e Análise Linear

Ano lectivo: 2004/05 — 1 de Julho de 2005

Duração: 2h 30m

1. Considere o conjunto $\mathcal{B} = \{\{nk\,;\, n \in \mathbb{N}\}\,;\, k \in \mathbb{N}\}$ de partes de $\mathbb{N}$.

   (a) Mostre que a intersecção de dois elementos de $\mathcal{B}$ ainda pertence a $\mathcal{B}$. Conclua que $\mathcal{B}$ é base de uma topologia $\mathcal{T}$ em $\mathbb{N}$.

   Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $B_k = \{nk\,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

   Dados $B_k, B_j \in \mathcal{B}$, $m \in B_k \cap B_j$ se e só se existem $n, n' \in \mathbb{N}$ tais que $m = nk = n'j$, isto é, se m é simultaneamente múltiplo de k e j; ou seja, $m \in B_k \cap B_j$ se e só se m é múltiplo do mínimo múltiplo comum de k e j. Portanto $B_k \cap B_j = B_{mmc(k,j)}$ ainda pertence a $\mathcal{B}$.

   Para provar que $\mathcal{B}$ é uma base, usamos um critério provado na aula teórica:

   - $\mathbb{N} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, pois $\mathbb{N} = B_1$;
   - se $B_k, B_j \in \mathcal{B}$ e $x \in B_k \cap B_j$, então $x \in B_{mmc(k,j)} = B_k \cap B_j$.

   (b) Seja A o conjunto dos números pares. Calcule $\text{int}(A)$, $\overline{A}$ e A' em $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$.

   Se A é o conjunto dos números pares, então $A = B_2 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Ou seja, $\text{int}(A) = A$. Verifiquemos agora que $\overline{A} = A' = \mathbb{N}$. Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, se $n \in U \in \mathcal{T}$, também $2n \in U$. Como $2n \in A$, temos que $U \cap A \neq \emptyset$ e então $n \in \overline{A}$. Este argumento permite-nos ainda concluir que $n \in A'$ pois

   $$(\forall U \in V_n)\ \ 2n \in U \cap (A \setminus \{n\}).$$

   (c) Prove que $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, com a topologia de subespaço, não é um espaço compacto.

   Seja P o conjunto dos números primos (diferentes de 1). Então $\mathbb{N} \setminus \{1\} = \bigcup_{p \in P} B_p$ e esta cobertura aberta não tem subcobertura finita. De facto, se J é um subconjunto finito de P e $q \in P \setminus J$, então $q \notin \bigcup_{p \in J} B_p$ pois, qualquer que seja $p \in J$, q não é múltiplo de p (por definição de número primo).

2. Considere em $\mathbb{R}$ a topologia de Sorgenfrey, isto é, a topologia $\mathcal{T}$ gerada pela base

   $$\mathcal{B} = \{\,]a, b]\,;\, a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}.$$

   (a) Verifique se $\{\,]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0.

   Embora, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ seja uma vizinhança de 0, há vizinhanças de 0, como, por exemplo, $]-1, 0]$ que não contêm nenhuma desta forma. Logo $\{\,]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ não é um sistema fundamental de vizinhanças de 0.

   (b) Verifique se a função $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ definida por $f(x) = x^2$ é contínua.

   A função f não é contínua. De facto, se considerarmos, por exemplo, o aberto $]0, 1]$, a sua imagem inversa por f é $[-1, 0[\cup]0, 1]$, que não é aberto, pois -1 não pertence ao seu interior.

(c) Defina espaço conexo. Verifique se $[0,1]$ é um subespaço conexo de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Um espaço topológico X diz-se conexo se, sempre que $X = A \cup B$, com A e B abertos disjuntos, então $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Como $[0,1] = [0, \frac{1}{2}] \cup]\frac{1}{2}, 1]$, onde cada um dos conjuntos é aberto em $[0,1]$ (uma vez que $[0, \frac{1}{2}] =]-1, \frac{1}{2}] \cap [0,1]$), concluímos que o espaço não é conexo.

3. (a) Defina sucessão de Cauchy num espaço métrico e defina espaço métrico completo.

Seja (X,d) um espaço métrico. Uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X diz-se uma sucessão de Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} \ : \ \forall m,n \in \mathbb{N} \ \ m \geq p \text{ e } n \geq p \ \Rightarrow \ d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

O espaço X diz-se completo se toda a sucessão de Cauchy em X convergir.

(b) Relativamente a propriedades de espaços métricos, uma das seguintes implicações é falsa:

$$\text{completo} \ \Rightarrow \ \text{compacto} \ \Rightarrow \ \text{completo} \ .$$

Indique-a e apresente um exemplo para o qual essa implicação falhe.

Todo o espaço compacto é completo mas o recíproco não se verifica. Um exemplo clássico desta situação é a recta euclidiana, que é completa mas não é compacta.

(c) Mostre que, se X é um espaço métrico para o qual existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo o $x \in X$, a bola fechada $B_\varepsilon[x]$ é compacta, então o espaço X é completo.

Sejam X e ε nas condições do enunciado e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em X. Por definição de sucessão de Cauchy, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $m,n \in \mathbb{N}$ com $m,n \geq p$, então $d(x_m,x_n) < \varepsilon$. Em particular, se $m \geq p$, então $x_m \in B_\varepsilon(x_p) \subseteq B_\varepsilon[x_p]$. Como a subsucessão $(x_{m+n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy e só toma valores em $B_\varepsilon[x_p]$, que é completa, a sucessão $(x_{m+n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $B_\varepsilon[x_p]$ para algum x. Logo também (x_n) converge para x (em X).

4. Seja $\|\cdot\|$ a norma do supremo no espaço vectorial $\mathcal{C}^1[0,1]$ das funções $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínuas e com derivada contínua.

(a) Mostre que

$$\|f\|_1 := \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)| + |f'(x)|)$$

define uma norma no mesmo espaço.

(1) $\|f\|_1 = 0 \ \Leftrightarrow \ \sup\limits_{x\in[0,1]} (|f(x)| + |f'(x)|) = 0 \ \Leftrightarrow \ \forall x \in [0,1] \ \ f(x) = 0.$

(2) Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda f\|_1 = \sup\limits_{x\in[0,1]} (|\lambda f(x)| + |\lambda f'(x)|) = |\lambda| \|f\|_1.$

(3)

$$\begin{aligned} \|f+g\|_1 &= \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)+g(x)| + |f'(x)+g'(x)|) \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)| + |g(x)| + |f'(x)| + |g'(x)|) \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)| + |f'(x)|) + \sup_{x\in[0,1]} (|g(x)| + |g'(x)|) = \|f\|_1 + \|g\|_1. \end{aligned}$$

(b) Mostre que o operador linear identidade $T : (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_1) \to (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|)$ é limitado. Calcule a sua norma.

Para todo o $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$,

$$\|T(f)\| = \|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)| + |f'(x)|) = \|f\|_1$$

(uma vez que $|f'(x)| \geq 0$). Logo o operador linear T é limitado e a sua norma é menor ou igual a 1. Para verificar que $\|T\| = 1$, basta considerar, por exemplo, a função constante $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 1$. Como $\|T(f)\| = 1$ e $\|f\|_1 = 1$, podemos concluir que $\|T\| \geq 1$. Portanto $\|T\| = 1$.

(c) Pode concluir que T é uma função uniformemente contínua? Justifique a sua resposta.

Todo o operador linear limitado é uma função uniformemente contínua. Neste caso particular tem-se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \varepsilon > 0 \ : \ \forall f,g \in \mathcal{C}^1[0,1] \ \|f-g\|_1 < \varepsilon \Rightarrow \|f-g\| < \varepsilon.$$

(d) Dê um exemplo de uma sucessão em $\mathcal{C}^1[0,1]$ que convirja para a função nula relativamente à norma do supremo e que não convirja relativamente à norma $\|\cdot\|_1$.

A sucessão de funções $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ com $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ converge, relativamente à norma do supremo, para a função nula, uma vez que

$$\|f_n\| = \sup_{x\in[0,1]} |\frac{1}{n}\sin(nx)| \leq \frac{1}{n},$$

mas não converge para a função nula relativamente à norma $\|\cdot\|_1$, pois

$$\begin{aligned} \|f_n\|_1 &= \sup_{x\in[0,1]} (|\frac{1}{n}\sin(nx)| + |f_n'(x)|) \\ &= \sup_{x\in[0,1]} (|\frac{1}{n}\sin(nx) + |\cos(nx)|) \\ &\geq \sup_{x\in[0,1]} (|\cos(nx)|) = 1. \end{aligned}$$

Por outro lado, (f_n) não pode convergir, relativamente a esta norma, para outra função, pois se $f_n \to f$ em $(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_1)$, também $f_n \to f$ em $(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|)$ porque T é contínua.

(e) Pode concluir da alínea anterior que a função identidade $T_1 : (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|) \to (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_1)$ não é contínua. Justifique esta afirmação.

Se T_1 fosse contínua, de $f_n \to 0$ em $(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|)$ poderíamos concluir que $f_n \to 0$ em $(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_1)$, o que é falso.

(f) Finalmente, podemos concluir que o espaço vectorial $\mathcal{C}^1[0,1]$ não tem dimensão finita. Porquê?

Acabámos de verificar que as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ não são equivalentes. Como provámos na aula teórica que quaisquer duas normas num espaço vectorial de dimensão finita são equivalentes, podemos concluir que $\mathcal{C}^1[0,1]$ tem dimensão infinita.