Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Topologia e Análise Linear

Ano lectivo 2004/05 — 4 de Maio de 2005

1. Considere os conjuntos $X = \{a, b, c, d, e\}$ e $\mathcal{S} = \{\{a\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}\}$.

   (a) Determine a topologia gerada por $\mathcal{S}$ em X.

   Os elementos da topologia $\mathcal{T}$ gerada por $\mathcal{S}$ são todas as reuniões de intersecções (finitas) de elementos de $\mathcal{S}$; ou seja,

   $$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}.$$

   (b) Determine o interior, o fecho e o conjunto derivado de $C = \{a, b\}$.

   O interior de C é o maior aberto contido em C; logo $\text{int}(C) = \{a\}$.

   O fecho de C é o menor fechado que contém C. Como o conjunto dos fechados é

   $$\{\emptyset, \{e\}, \{b, e\}, \{d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\},$$

   $\overline{C} = \{a, b, e\}$.

   Finalmente, calculemos C'. Sabemos que

   $$\overline{C} \setminus C \subseteq C' \subseteq \overline{C}; \text{ isto é, } \{e\} \subseteq C' \subseteq \{a, b, e\}.$$

   Resta então verificar se a e b são pontos de acumulação de C. Como $\{a\}$ é aberto, $\{a\}$ é vizinhança de a e então $\{a\} \cap (C \setminus \{a\}) = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$, logo $a \notin C'$. Mas $b \in C'$ pois, qualquer que seja a vizinhança V de b, $V \supseteq \{a, b, c\}$, logo $V \cap (C \setminus \{b\}) = \{a\} \neq \emptyset$.

2. Considere em $\mathbb{R}$ a topologia

   $$\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{R}\,;\, A = \emptyset \text{ ou } A \text{ é um intervalo aberto ao qual 1 pertence}\}.$$

   (a) Verifique se a função $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$, com $f(x) = x^2$ é contínua.

   A função f não é contínua pois, por exemplo, $A =]0, 2[$ é um aberto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ mas $f^{-1}(A) =]-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}[$ não é aberto porque, embora 1 lhe pertença, não é um intervalo aberto.

   (b) Verifique se este espaço é conexo.

   O espaço é conexo pois, se A e B são abertos não vazios, então $1 \in A \cap B$, logo não existem dois abertos disjuntos não vazios.

   (c) Verifique se a sucessão $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Em caso afirmativo, diga para que pontos esta sucessão converge.

   A sucessão $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo o número real menor ou igual a 0. De facto, se $x \leq 0$ e $V \in \mathcal{V}_x$, então V contém um intervalo aberto que contém x e 1, logo $[0, 1] \subseteq V$. Conclui-se imediatamente que os termos da sucessão pertencem (todos) a V e então a sucessão converge trivialmente para x. Por outro lado, se $x > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < x$. Considerando a vizinhança $V =]\frac{1}{k}, x + 1[$ de x, temos que, para todo o $p \in \mathbb{N}$, existe $n = \max\{p, k\} \geq p$ tal que $\frac{1}{n} \notin V$ porque $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k}$. Logo $(\frac{1}{n})$ não converge para x.

(d) Mostre que $[-2,2] \setminus \{0\}$, com a topologia de subespaço, é compacto.

Se $[-2,2] \setminus \{0\} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, com $A_i \in \mathcal{T}$ para todo o $i \in I$, então existem $i_0, i_1 \in I$ tais que $-2 \in A_{i_0}$ e $2 \in A_{i_1}$. Logo, $[-2,1] \subseteq A_{i_0}$ e $[1,2] \subseteq A_{i_1}$, donde se conclui que $[-2,2] \setminus \{0\} \subseteq A_{i_0} \cup A_{i_1}$.

3. Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços métricos não vazios. Considere em $X \times Y$ a métrica

$$\begin{array}{rcl} d : (X \times Y) \times (X \times Y) & \longmapsto & \mathbb{R}^+. \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \longmapsto & d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2) \end{array}$$

(a) Prove que $p_X : (X \times Y, d) \to (X, d_1)$ é uma aplicação uniformemente contínua.

A função é uniformemente contínua porque, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon > 0$ tal que, se $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$, de $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2) < \varepsilon$ conclui-se que $d_1(p_X(x_1, y_1), p_X(x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) \leq d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \varepsilon$.

(b) Mostre que uma sucessão $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ em $X \times Y$ converge para (x, y) se e só se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x em (X, d_1) e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para y em (Y, d_2).

Suponhamos que $(x_n, y_n) \to (x, y)$ em $X \times Y$. Porque p_X e p_Y são funções contínuas (a demonstração de que p_Y é uniformemente contínua é análoga à feita para p_X na alínea anterior), $p_X(x_n, y_n) = x_n \to p_X(x, y) = x$ e $p_Y(x_n, y_n) = y_n \to p_Y(x, y) = y$.

Reciprocamente, se $x_n \to x$ em X e $y_n \to y$ em Y, então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p_1$, então $d_1(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ e existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p_2$, $d_2(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, se $p = \max\{p_1, p_2\}$ e $n \geq p$, temos $d((x_n, y_n), (x, y)) = d_1(x_n, x) + d_2(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(c) Prove que o espaço métrico $(X \times Y, d)$ é completo se e só se (X, d_1) e (Y, d_2) são espaços completos.

Suponhamos em primeiro lugar que $(X \times Y, d)$ é um espaço métrico completo. Seja (x_n) uma sucessão de Cauchy em X. Fixemos $y \in Y$ (que existe porque por hipótese $Y \neq \emptyset$). A sucessão $((x_n, y))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy em $X \times Y$, uma vez que $d((x_n, y), (x_m, y)) = d_1(x_n, x_m)$, logo converge em $X \times Y$. Seja (x', y') o seu limite. Porque p_X é contínua, concluímos que $x_n \to x'$ e então é uma sucessão convergente, como queríamos provar. Prova-se de forma análoga que Y é completo.

Suponhamos agora que (X, d_1) e (Y, d_2) são espaços completos. Seja $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em $X \times Y$. Porque p_X e p_Y são funções uniformemente contínuas, (x_n) e (y_n) são sucessões de Cauchy em X e Y, respectivamente. Logo (x_n) e (y_n) são sucessões convergentes. Sejam x e y os respectivos limites. Pela alínea anterior concluímos que $(x_n, y_n) \to (x, y)$.