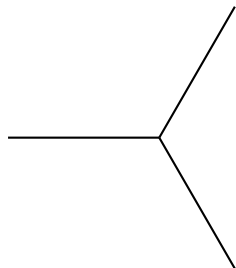


DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA  
VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Ano lectivo: 2010/2011

Trabalho 1

1. Defina uma estrutura de variedade diferenciável no conjunto



2. Mostre que os atlas  $\mathcal{A} = \{\pi_N, \pi_S\}$ ,  $\mathcal{B} = \{p_1^+, p_1^-, \dots, p_{n+1}^+, p_{n+1}^-\}$  de  $\mathbb{S}^n$ , onde  $\pi_i$  são as projecções estereográficas e  $p_j^\pm$  são as projecções ortogonais, são compatíveis.
3. Seja  $M$  uma variedade diferenciável conexa. Mostre que  $M$  é conexa por arcos.
4. Sejam  $M^m, N^n$  duas variedades diferenciáveis. Mostre que o produto cartesiano  $M \times N$  pode ser dotado de uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão  $m + n$ .
5. O espaço projectivo complexo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  é o conjunto das rectas complexas em  $\mathbb{C}^2$ , isto é, os seus pontos são da forma  $\langle (z_1, z_2) \rangle = \{(\lambda z_1, \lambda z_2) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ , onde  $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$ .
  - (a) Mostre que  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  é uma variedade diferenciável de dimensão 2.
  - (b) Mostre que  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  é difeomorfa a  $\mathbb{S}^2$ .