Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Ano lectivo: 2010/2011 **Trabalho 3**

1. Sejam X, Y campos vectoriais em M, N, respectivamente. Mostre que o campo vectorial (X, Y) está relacionado com X por uma aplicação.

2. Dê um exemplo de uma variedade diferenciável com dois campos vectoriais completos X e Y tais que $X + Y$ não é completo.

3. Seja X um campo vectorial em M, Φ o seu fluxo e $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciável. Para cada $x \in M$, defina-se num intervalo $(-\varepsilon_x, \varepsilon_x)$ a aplicação $g_x(t) = f(\Phi(t, x))$. Determine $g'_x(0)$.

4. (a) Mostre que o conjunto das matrizes $M = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ é um grupo de Lie para a multiplicação de matrizes.

   (b) Determine o espaço tangente de M na identidade (identificando os vectores tangentes com matrizes 3×3).

5. Considere a variedade diferenciável $M = GL_n(\mathbb{R})$ de dimensão n^2 e identifique $\mathcal{L}GL_n(\mathbb{R})$ com $GL_n(\mathbb{R})$. Determine $[A, B]$, para quaisquer $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$.