Problema **1**

***Definição:***

Sejam números complexos distintos. A medida do ângulo orientado entre e é igual ao .

Problema:

Mostre que é um imaginário puro .

Problema 2

***Definição:***

*Sejam números complexos, tem-se que*

Problema:

A partir da identidade acima, mostre que

Problema **3** (Olimpíada Chinesa 98)

***Definição:***

*Seja D um ponto no interior de um triângulo acutângulo ABC, com*

Problema:

Determine quais são as possíveis posições que *D* pode ocupar.

Problema 4 (Olimpíada Universitária Húngara 1995)

***Definição 1:***

**Problema**

São dados pontos na circunferência unitária de modo que o produto das distâncias de qualquer ponto da circunferência a estes pontos é menor ou igual a 2. Prove que os pontos são vértices de um –ágono regular.

Problema 5 **(IMO 75)**

***Definição***

Problema

Determine se existem ou não 1975 pontos sobre a circunferência unitária tais que a distância entre quaisquer dois é um número racional.

Problema 6 (IMO 63)

***Definição:***

Problema

Todos os ângulos internos de um *n-*ágono são iguais e seus lados satisfazem a relação  Prove que 

****

Solução Problema 1.

Sejam e dois vetores perpendiculares então a medida do ângulo orientado entre eles é de , ou seja,

,

que é equivalente a

para algum .

Assim,

e, por isso, também se pode escrever da forma

Solução Problema 2.

Solução Problema 3.

Sejam *a, b, c,* e 0 as coordenadas complexas de *A, B, C* e *D*, respetivamente.

Temos, então que ⇔ 

Como , sendo 

 e portanto, *w*1, *w*2, *w*3 estão alinhados.

Assim, existem reais positivos *α* e *β* tais que



isto é,  e, analogamente,  e  O único ponto *D* no interior de um triângulo acutângulo que satisfaz essas condições é o ortocentro.

Solução Problema 4.

Considere a circunferência centrada na origem e sejam *z*1, *z*2, …, *zn* os números complexos que representam os pontos. Podemos assumir que .

Considere ainda o seguinte polinômio



Então |*p*(*z*)| é o produto das distâncias do ponto representado pelo número complexo *z* aos pontos dados .

Logo, se *z* é um número complexo de módulo 1, então | *p*(*z*)| ≤ 2.

Sejam *w*1, *w*2,… *wn* as raízes *n*-ésimas da unidade.

Sabe-se que  para todo *k* = 1, 2,…,*n* – 1. Portanto Se *Q*(*w*) não é identicamente nulo, então, para algum *j*, *Q* (*wj*) é diferente de zero e tem parte real não negativa, pois *Q*(0) = 0 e *Q* tem no máximo *n* – 1 raízes. Consequentemente, , uma contradição.

Desta forma o polinômio *Q* é identicamente nulo e *p*(*z*) = *zn* + 1. As raízes *z*1, *z*2, …, *zn* do polinômio *p*(*z*) formam um *n*-ágono regular.

Solução Problema 5.

Let x be the angle cos-14/5, so that cos x = 4/5, sin x = 3/5. Take points on the unit circle at angles 2nx for n integral. Then the distance between the points at angles 2nx and 2mx is 2 sin(n - m)x. The usual formula, giving sin(n - m)x in terms of sin x and cos x, shows that sin(n - m)x is rational. So it only remains to show that this process generates arbitarily many distinct points, in other words that x is not a rational multiple of pi.

This is quite hard. There is an elegant argument in sections 5 and 8 of Hadwiger et al, Combinatorial geometry in the Plane. But we can avoid it by observing that there are only finitely many numbers with are nth roots of unity for n <= 2 x 1975, whereas there are infinitely many Pythagorean triples, so we simply pick a triple which is not such a root of unity.

Solução Problema 6.

For n odd consider the perpendicular distance of the shortest side from the opposite vertex. This is a sum of terms ai x cosine of some angle. We can go either way round. The angles are the same in both cases, so the inequalities give that a1 = an-1, and hence a1 = ai for all i < n. We get a1 = an by repeating the argument for the next shortest side. The case n even is easier, because we take a line through the vertex with sides a1 and an making equal angles with them and look at the perpendicular distance to the opposite vertex. This gives immediately that a1 = an.

Solução Problema 5.

Let x be the angle cos-14/5, so that cos x = 4/5, sin x = 3/5. Take points on the unit circle at angles 2nx for n integral. Then the distance between the points at angles 2nx and 2mx is 2 sin(n - m)x. The usual formula, giving sin(n - m)x in terms of sin x and cos x, shows that sin(n - m)x is rational. So it only remains to show that this process generates arbitarily many distinct points, in other words that x is not a rational multiple of pi.

This is quite hard. There is an elegant argument in sections 5 and 8 of Hadwiger et al, Combinatorial geometry in the Plane. But we can avoid it by observing that there are only finitely many numbers with are nth roots of unity for n <= 2 x 1975, whereas there are infinitely many Pythagorean triples, so we simply pick a triple which is not such a root of unity.

Solução Problema 6.

For n odd consider the perpendicular distance of the shortest side from the opposite vertex. This is a sum of terms ai x cosine of some angle. We can go either way round. The angles are the same in both cases, so the inequalities give that a1 = an-1, and hence a1 = ai for all i < n. We get a1 = an by repeating the argument for the next shortest side. The case n even is easier, because we take a line through the vertex with sides a1 and an making equal angles with them and look at the perpendicular distance to the opposite vertex. This gives immediately that a1 = an.

Problema 5 **(IMO 75)**

***Definição***

Problema

Determine se existem ou não 1975 pontos sobre a circunferência unitária tais que a distância entre quaisquer dois é um número racional.

Problema 6 (IMO 63)

***Definição:***

Problema

Todos os ângulos internos de um *n-*ágono são iguais e seus lados satisfazem a relação  Prove que 