DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Olimpíadas envolvendo números complexos

Catarina Isabel Rosa Silva

Trabalho realizado no âmbito do Projeto Educacional II,
Disciplina do Mestrado em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientadora: Raquel Caseiro

Ano letivo 2011/2012

PROBLEMA 1

Proposição:

Sejam z_1, z_2 e z_3 números complexos distintos. A medida do ângulo orientado entre $\overrightarrow{z_1z_2}$ e $\overrightarrow{z_1z_3}$ é igual ao $arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$.

PROBLEMA:

Mostre que $\overrightarrow{z_1z_2} \perp \overrightarrow{z_1z_3} \Leftrightarrow \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ *é um imaginário puro* $\Leftrightarrow \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} + \frac{\overline{z_3-z_1}}{\overline{z_2-z_1}} = 0$.

PROBLEMA 2

Proposição: *A reta r, perpendicular a z_2z_3 que passa pelo ponto z_1 é*

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \overline{\left(\frac{z-z_1}{z_3-z_2}\right)} = -\frac{z-z_1}{z_3-z_2}\right\}.$$

Utilizando a proposição anterior demonstre a proposição seguinte.

Proposição: *Seja $\Delta z_1z_2z_3$ um triângulo definido no plano complexo. O seu baricentro é*

$$z = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

PROBLEMA 3

Utilizando a proposição do problema anterior, prove a seguinte proposição.

Proposição: *Seja $\Delta z_1z_2z_3$ um triângulo definido no plano complexo. O seu circuncentro é*

$$z = \frac{|z_1|^2(z_3-z_2)+|z_2|^2(z_1-z_3)+|z_3|^2(z_2-z_1)}{\overline{z_1}(z_3-z_2)+\overline{z_2}(z_1-z_3)+\overline{z_3}(z_2-z_1)}.$$

PROBLEMA 4

Proposição: *Dois triângulos, $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta w_1 w_2 w_3$, são semelhantes, se e somente se,* $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$.

Utilizando a proposição anterior demonstre o seguinte teorema.

Teorema: *Dois triângulos são semelhantes, $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$, se e só se o determinante*

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ é nulo.}$$

PROBLEMA 5

Teorema: *Os afixos dos complexos z_1 , z_2* e *z_3 são os vértices de um triângulo equilátero se e só se $z_1 + wz_2 + w^2 z_3 = 0$ ou $z_1 + w^2 z_2 + wz_3 = 0$, onde w é uma raiz cúbica de unidade diferente de 1.*

Utilizando o teorema anterior demonstre o teorema seguinte.

Teorema: Um triângulo *$\Delta z_1 z_2 z_3$ é equilátero se e somente se $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta z_3 z_1 z_2$, ou seja,*

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_3 & 1 \\ z_2 & z_1 & 1 \\ z_3 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

PROBLEMA 6

Proposição: *Sejam z_1, z_2, z_3 e z_4 vértices de um quadrilátero inscrito numa circunferência, posicionados pela ordem, z_1, z_2, z_3 e z_4 então*

$$[z_1, z_3, z_2, z_4] = \frac{(z_1 - z_2)}{(z_1 - z_4)} / \frac{(z_3 - z_2)}{(z_3 - z_4)} = \lambda < 0.$$

Utilizando a proposição anterior, demonstre o seguinte teorema, Teorema de Ptolemeu.

Teorema: *A soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos do quadrilátero $[z_1 z_2 z_3 z_4]$ é igual ao produto dos comprimentos das diagonais, ou seja,*

$$|z_1 - z_3||z_2 - z_4| = |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_3 - z_2|.$$

PROBLEMA 7 (Olimpíada Chinesa 98)[1]

Seja D um ponto no interior de um triângulo acutângulo ABC, com

$$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA.$$

Determine quais são as possíveis posições que D pode ocupar.

PROBLEMA 8 (Olimpíada Universitária Húngara 1995) [2]

Proposição 1:

Sejam $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ *números complexos e*

$$p(w) = (w - z_1)(w - z_2) \dots (w - z_n) = w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_{n-1} w + 1 = w^n + Q(w) + 1,$$

então $|p(w)|$ *é o produto das distâncias do ponto representado pelo número complexo z aos pontos dados .*

Proposição 2:

Sejam $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ *números complexos que representam pontos de um circunferência centrada na origem, então* $(-1)^n . z_1 . z_2 \dots z_n = 1$.

PROBLEMA

São dados n pontos na circunferência unitária de modo que o produto das distâncias de qualquer ponto da circunferência a estes pontos é menor ou igual a 2. Prove que os pontos são vértices de um n–ágono regular.

[1,2] MOTTA, EDMILSON (1999). Aplicações dos números complexos à geometria, Brasil.

SOLUÇÃO PROBLEMA 1.

Sejam $\overrightarrow{z_1z_2}$ e $\overrightarrow{z_1z_3}$ dois vetores perpendiculares então a medida do ângulo orientado entre eles é de $\frac{\pi}{2}$, ou seja,

$$\arg(z_2 - z_1) = \arg(z_4 - z_3) \pm \frac{\pi}{2},$$

que é equivalente a

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \lambda i \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \text{ é um imaginário puro}$$

e, por isso, também se pode escrever da forma

$$\overline{\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)} = -\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} + \frac{\overline{z_3 - z_1}}{\overline{z_2 - z_1}} = 0.$$

SOLUÇÃO PROBLEMA 2.

Como o baricentro é calculado à custa da interseção das medianas de um triângulo,

$$\begin{cases} \overline{\left(\dfrac{z - z_1}{z_1 - \dfrac{z_2 + z_3}{2}}\right)} = \dfrac{z - z_1}{z_1 - \dfrac{z_2 + z_3}{2}} \\ \overline{\left(\dfrac{z - z_2}{z_2 - \dfrac{z_1 + z_3}{2}}\right)} = \dfrac{z - z_2}{z_2 - \dfrac{z_1 + z_3}{2}} \\ \overline{\left(\dfrac{z - z_3}{z_3 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}}\right)} = \dfrac{z - z_3}{z_3 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}} \end{cases}.$$

simplificando uma das equações, por exemplo a primeira

obtêm-se

$$\bar{z}(2z_1 - z_2 - z_3) - z(\overline{2z_1} - \overline{z_2} - \overline{z_3}) = z_1(\overline{z_2} + \overline{z_3}) - \overline{z_1}(z_2 + z_3).$$

Deste modo, têm-se

$$\begin{cases} \bar{z}(2z_1 - z_2 - z_3) - z(\overline{2z_1} - \overline{z_2} - \overline{z_3}) = z_1(\overline{z_2} + \overline{z_3}) - \overline{z_1}(z_2 + z_3) \\ \bar{z}(2z_2 - z_1 - z_3) - z(\overline{2z_2} - \overline{z_1} - \overline{z_3}) = z_2(\overline{z_1} + \overline{z_3}) - \overline{z_2}(z_1 + z_3). \\ \bar{z}(2z_3 - z_2 - z_1) - z(\overline{2z_3} - \overline{z_2} - \overline{z_1}) = z_3(\overline{z_2} + \overline{z_1}) - \overline{z_3}(z_2 + z_1) \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação

$$\bar{z} = \frac{z_1(\overline{z_2} + \overline{z_3}) - \overline{z_1}(z_2 + z_3) + z(\overline{2z_1} - \overline{z_2} - \overline{z_3})}{(2z_1 - z_2 - z_3)}$$

Substituindo na segunda equação o resultado anterior têm-se

$$\left[\frac{z_1(\overline{z_2} + \overline{z_3}) - \overline{z_1}(z_2 + z_3) + z(\overline{2z_1} - \overline{z_2} - \overline{z_3})}{(2z_1 - z_2 - z_3)}\right](2z_2 - z_1 - z_3) - z(\overline{2z_2} - \overline{z_1} - \overline{z_3}) = z_1(\overline{z_1} + \overline{z_3}) - \overline{z_1}(z_1 + z_3)$$

Simplificando,

$$z = \frac{[z_1(\overline{z_1} + \overline{z_3}) - \overline{z_1}(z_1 + z_3)](2z_1 - z_2 - z_3) + [z_1(\overline{z_2} + \overline{z_3}) - \overline{z_1}(z_2 + z_3)](2z_2 - z_1 - z_3)}{[(\overline{2z_1} - \overline{z_2} - \overline{z_3})(2z_2 - z_1 - z_3) - (\overline{2z_2} - \overline{z_1} - \overline{z_3})(2z_1 - z_2 - z_3)]}$$

Ou seja,

$$z = \frac{(z_1 + z_2 + z_3)[z_1(\overline{z_3} - \overline{z_2}) + z_2(\overline{z_1} - \overline{z_3}) + z_3(\overline{z_2} - \overline{z_1})]}{3[z_1(\overline{z_3} - \overline{z_2}) + z_2(\overline{z_1} - \overline{z_3}) + z_3(\overline{z_2} - \overline{z_1})]}$$

E, portanto, concluímos que o baricentro é dado por

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

SOLUÇÃO PROBLEMA 3.

O circuncentro é a da interseção das mediatrizes dos lados do triângulo. Basta assim considerar as equações das retas das mediatrizes e encontrar o ponto comum às mesmas. Deste modo, o circuncentro é a solução do sistema:

$$\begin{cases} \overline{\left(\dfrac{z - \frac{z_1 + z_2}{2}}{z_1 - z_2}\right)} = -\dfrac{z - \frac{z_1 + z_2}{2}}{z_1 - z_2} \\ \overline{\left(\dfrac{z - \frac{z_2 + z_3}{2}}{z_2 - z_3}\right)} = -\dfrac{z - \frac{z_2 + z_3}{2}}{z_2 - z_3} \\ \overline{\left(\dfrac{z - \frac{z_1 + z_3}{2}}{z_3 - z_1}\right)} = -\dfrac{z - \frac{z_1 + z_3}{2}}{z_3 - z_1} \end{cases}.$$

Simplificando uma das equações, por exemplo a primeira

$$\overline{\left(\frac{z - \frac{z_1 + z_2}{2}}{z_1 - z_2}\right)} = -\frac{z - \frac{z_1 + z_2}{2}}{z_1 - z_2}$$

obtem-se

$$\bar{z}(z_1 - z_2) + z(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = |z_1|^2 - |z_2|^2.$$

Assim, o sistema acima é equivalente a

$$\begin{cases} \bar{z}(z_1 - z_2) + z(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = |z_1|^2 - |z_2|^2 \\ \bar{z}(z_2 - z_3) + z(\overline{z_2} - \overline{z_3}) = |z_2|^2 - |z_3|^2. \\ \bar{z}(z_3 - z_1) + z(\overline{z_3} - \overline{z_1}) = |z_3|^2 - |z_1|^2 \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação em ordem a $\bar{z}$ vem,

$$\bar{z} = \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2 - z(\overline{z_1} - \overline{z_2})}{(z_1 - z_2)}.$$

Substituindo na segunda equação o resultado anterior tem-se

$$\left(\frac{|z_1|^2 - |z_2|^2 - z(\overline{z_1} - \overline{z_2})}{(z_1 - z_2)}\right)(z_2 - z_3) + z(\overline{z_2} - \overline{z_3}) = |z_2|^2 - |z_3|^2,$$

ou seja,

$$(|z_1|^2 - |z_2|^2)(z_2 - z_3) - z(\overline{z_1} - \overline{z_2})(z_2 - z_3) + z(\overline{z_2} - \overline{z_3})(z_2 - z_3) = (\overline{z_2} - \overline{z_3})(|z_2|^2 - |z_3|^2),$$

de onde se obtém,

$$z[(\overline{z_2} - \overline{z_3})(z_2 - z_3) - (\overline{z_1} - \overline{z_2})(z_2 - z_3)] = (\overline{z_2} - \overline{z_3})(|z_2|^2 - |z_3|^2) - (|z_1|^2 - |z_2|^2)(z_2 - z_3).$$

Portanto, que o circuncentro é dado por

$$z = \frac{|z_1|^2(z_3 - z_2) + |z_2|^2(z_1 - z_3) + |z_3|^2(z_2 - z_1)}{\overline{z_1}(z_3 - z_2) + \overline{z_2}(z_1 - z_3) + \overline{z_3}(z_2 - z_1)}.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Os triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta w_1 w_2 w_3$ são semelhantes se, e somente se, $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$. Ora,

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 - z_1 & w_2 - w_1 & 1-1 \\ z_3 - z_1 & w_3 - w_1 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 - z_1 & w_2 - w_1 & 0 \\ z_3 - z_1 & w_3 - w_1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 - z_1 & w_2 - w_1 & 0 \\ z_3 - z_1 & w_3 - w_1 & 0 \end{vmatrix} = (z_2 - z_1)(w_3 - w_1) - (z_3 - z_1)(w_2 - w_1).$$

Portanto, $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$ se e somente se $\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

Pelo Teorema apresentado no problema anterior, sabemos que $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta z_3 z_1 z_2$ se e somente se

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_3 & 1 \\ z_2 & z_1 & 1 \\ z_3 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Simplificando a equação acima vem

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_1 z_2 + z_2 z_1 + z_2 z_3) = 0.$$

Como $w^2 + w + 1 = 0$, então a equação acima pode reescrever-se como

$$(z_1 + z_2 w + z_3 w^2)(z_1 + z_2 w^2 + z_3 w) = 0.$$

Concluímos que $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta z_3 z_1 z_2$ se e somente se

$$(z_1 + z_2 w + z_3 w^2) = 0 \text{ ou } (z_1 + z_2 w^2 + z_3 w) = 0.$$

Pelo teorema sugerido estas são as condições necessárias e suficientes para que o triângulo seja equilátero.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

Pela Proposição sugerida $[z_1, z_3, z_2, z_4] < 0$,ou seja,

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) = k(z_1 - z_4)(z_3 - z_2),\ k < 0,$$

logo,

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_3 - z_2| &= |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_3 - z_2| \\ &= |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)| + |(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)| \\ &= |k(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)| + |(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)| \\ &= -k|(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)| + |(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)| \\ &= -(k - 1)|(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)|. \end{aligned}$$

Como $k < 0$ vem

$$|z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_3 - z_2| = |k - 1||(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)|$$

$$= |(k-1)(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)|$$

$$= |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) - (z_1 - z_4)(z_3 - z_2)|$$

$$= |(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)|$$

$$= |(z_1 - z_3)||(z_2 - z_4)|.$$

E, portanto,

$$|z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_3 - z_2| = |(z_1 - z_3)||(z_2 - z_4)|$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 7

Sejam *a, b, c,* e 0 as coordenadas complexas de *A, B, C* e *D*, respetivamente.

Temos, então que $DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA \Leftrightarrow$ $|a \cdot b \cdot (b-a)| + |b \cdot c \cdot (c-b)| + |c \cdot a \cdot (a-c)| = |(b-a)(c-b)(a-c)| (*)$

Como $ab(b-a) + bc(c-b) + ca(a-c) = -(b-a)(c-b)(a-c)$, sendo $w_1 = ab(b-a)$,

$w_2 = bc(c-b), w_3 = ca(a-c), (*) \Leftrightarrow |w_1| + |w_2| + |w_3| = |w_1 + w_2 + w_3|$ e portanto, w_1, w_2, w_3 estão alinhados.

Assim, existem reais positivos α e β tais que

$$\left|\begin{array}{l} w_1 = \alpha w_2 \\ \\ w_1 = \beta w_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} ab(b-a) = \alpha bc(c-b) \\ \\ ab(b-a) = \beta ca(a-c) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a(b-a) = \alpha c(c-b) \\ \\ b(b-a) = \beta c(a-c) \end{array}\right. \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{b-c}{a-c},$$

isto é, $\angle A\hat{C}B = 180^\circ - \angle A\hat{D}B$ e, analogamente, $\angle A\hat{B}C = 180^\circ - \angle A\hat{D}C$ e $\angle B\hat{A}C = 180^\circ - \angle B\hat{D}C$. O único ponto *D* no interior de um triângulo acutângulo que satisfaz essas condições é o ortocentro.

SOLUÇÃO PROBLEMA 8.

Considere a circunferência centrada na origem e sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ os números complexos que representam os pontos. Podemos assumir que $(-1)^n \cdot z_1 \cdot z_2 \ldots z_n = 1$.

Considere ainda o seguinte polinômio

$$p(w) = (w - z_1)(w - z_2)\ldots(w - z_n) = w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots + a_{n-1} w + 1 = w^n + Q(w) + 1$$

Então $|p(z)|$ é o produto das distâncias do ponto representado pelo número complexo z aos pontos dados .

Logo, se z é um número complexo de módulo 1, então $|\, p(z)\,| \leq 2$.

Sejam w_1, w_2,... w_n as raízes n-ésimas da unidade.

Sabe-se que $w_1^k + w_2^k + \ldots + w_n^k = 0$ para todo k = 1, 2,...,n – 1. Portanto $Q(w_1) + Q(w_2) + \ldots + Q(w_n) = 0.$ Se $Q(w)$ não é identicamente nulo, então, para algum j, $Q\ (w_j)$ é diferente de zero e tem parte real não negativa, pois $Q(0) = 0$ e Q tem no máximo n – 1 raízes. Consequentemente, $|p(w_j)| = |2 + Q\ \ (w_j)| > 2$, uma contradição.

Desta forma o polinômio Q é identicamente nulo e $p(z) = z^n + 1$. As raízes z_1, z_2, ..., z_n do polinômio $p(z)$ formam um n-ágono regular.

SOLUÇÃO PROBLEMA 5.

Let x be the angle $\cos^{-1}4/5$, so that cos x = 4/5, sin x = 3/5. Take points on the unit circle at angles 2nx for n integral. Then the distance between the points at angles 2nx and 2mx is 2 sin(n - m)x. The usual formula, giving sin(n - m)x in terms of sin x and cos x, shows that sin(n - m)x is rational. So it only remains to show that this process generates arbitarily many distinct points, in other words that x is not a rational multiple of pi.

This is quite hard. There is an elegant argument in sections 5 and 8 of Hadwiger et al, Combinatorial geometry in the Plane. But we can avoid it by observing that there are only finitely many numbers with are nth roots of unity for n <= 2 x 1975, whereas there are infinitely many Pythagorean triples, so we simply pick a triple which is not such a root of unity.

SOLUÇÃO PROBLEMA 6.

For n odd consider the perpendicular distance of the shortest side from the opposite vertex. This is a sum of terms a_i x cosine of some angle. We can go either way round. The angles are the same in both cases, so the inequalities give that $a_1 = a_{n-1}$, and hence $a_1 = a_i$ for all i < n. We get $a_1 = a_n$ by repeating the argument for the next shortest side. The case n even is easier, because we take a line through the vertex with sides a_1 and a_n making equal angles with them and look at the perpendicular distance to the opposite vertex. This gives immediately that $a_1 = a_n$.

PROBLEMA 5 (IMO 75)

Definição

PROBLEMA

Determine se existem ou não 1975 pontos sobre a circunferência unitária tais que a distância entre quaisquer dois é um número racional.

PROBLEMA 6 (IMO 63)

Definição:

PROBLEMA

Todos os ângulos internos de um *n*-ágono são iguais e seus lados satisfazem a relação $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$. Prove que $a_1 = a_2 = ... = a_n$.