**Olimpíadas envolvendo números complexos**

**Catarina Isabel Rosa Silva**

Trabalho realizado no âmbito do Projeto Educacional II,

Disciplina do Mestrado em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientadora: Raquel Caseiro

Ano letivo 2011/2012



Problema **1**

***Proposição:***

*Sejam números complexos distintos. A medida do ângulo orientado entre e é igual ao .*

Problema:

*Mostre que é um imaginário puro .*

Problema 2

**Proposição:** *A reta r, perpendicular a que passa pelo ponto é*

Utilizando a proposição anterior demonstre a proposição seguinte.

**Proposição:** *Seja um triângulo definido no plano complexo. O seu baricentro é*

Problema **3**

Utilizando a proposição do problema anterior, prove a seguinte proposição.

**Proposição:** *Seja um triângulo definido no plano complexo. O seu circuncentro é*

Problema 4

**Proposição:** *Dois triângulos,*  *e , são semelhantes, se e somente se,*

Utilizando a proposição anterior demonstre o seguinte teorema.

**Teorema:** *Dois triângulos são semelhantes, ~ , se e só se o determinante*

 *é nulo*.

Problema 5

**Teorema:** *Os afixos dos complexos são os vértices de um triângulo equilátero se e só se ou onde é uma raiz cúbica de unidade diferente de 1.*

*Utilizando o teorema anterior demonstre o teorema seguinte.*

**Teorema:** Um triângulo  *é equilátero se e somente se , ou seja,*

Problema 6

**Proposição:** *Sejam e vértices de um quadrilátero inscrito numa circunferência, posicionados pela ordem, e então*

Utilizando a proposição anterior, demonstre o seguinte teorema, Teorema de Ptolemeu.

**Teorema:** *A soma**dos produtos dos comprimentos dos lados opostos do quadrilátero é igual ao produto dos comprimentos das diagonais, ou seja,*

Problema 7 (Olimpíada Chinesa 98)**[[1]](#footnote-1)**

*Seja D um ponto no interior de um triângulo acutângulo ABC, com*

*Determine quais são as possíveis posições que D pode ocupar.*

Problema 8 (Olimpíada Universitária Húngara 1995) [[2]](#footnote-2)

**Problema**

São dados pontos na circunferência unitária de modo que o produto das distâncias de qualquer ponto da circunferência a estes pontos é menor ou igual a 2. Prove que os pontos são vértices de um –ágono regular.

Problema 9 (Teorema do Napoleão)

**Problema**

Utilizando o teorema presente no Problema 5 demonstre o seguinte teorema.

**Teorema (Napoleão):** Se sobre cada lado de um triângulo qualquer, se traçar um triângulo equilátero externamente ao triângulo dado, então os centros desses três triângulos equiláteros serão os vértices de um quarto triângulo equilátero.

Problema 9 (Banco/ IMO 98)[[3]](#footnote-3)

Seja um triângulo, o seu ortocentro, o seu circuncentro e o seu circunraio. Seja o simétrico de com relação a , o simétrico de com relação a e o simétrico de com relação a .

Prove que e são colineares se, e somente se, .

Solução Problema 1.

Sejam e dois vetores perpendiculares então a medida do ângulo orientado entre eles é de , ou seja,

,

que é equivalente a

para algum .

Assim,

e, por isso, também se pode escrever da forma

Solução Problema 2.

Como o baricentro é calculado à custa da interseção das medianas de um triângulo,

simplificando uma das equações, por exemplo a primeira

obtêm-se

.

Deste modo, têm-se

Resolvendo a primeira equação

Substituindo na segunda equação o resultado anterior têm-se

Simplificando,

Ou seja,

E, portanto, concluímos que o baricentro é dado por

Solução Problema 3.

O circuncentro é a da interseção das mediatrizes dos lados do triângulo. Basta assim considerar as equações das retas das mediatrizes e encontrar o ponto comum às mesmas. Deste modo, o circuncentro é a solução do sistema:

Simplificando uma das equações, por exemplo a primeira

obtem-se

.

Assim, o sistema acima é equivalente a

Resolvendo a primeira equação em ordem a vem,

Substituindo na segunda equação o resultado anterior tem-se

ou seja,

de onde se obtém,

Portanto, que o circuncentro é dado por

Solução do Problema 4

Os triângulos e são semelhantes se, e somente se, . Ora,

*=.*

Portanto, se e somente se

Solução do problema 5

Pelo Teorema apresentado no problema anterior, sabemos que  se e somente se

Simplificando a equação acima vem

Como então a equação acima pode reescrever-se como

Concluímos que  se e somente se

 ou

Pelo teorema sugerido estas são as condições necessárias e suficientes para que o triângulo seja equilátero.

Solução do problema 6

Pela Proposição sugerida ,ou seja,

,

logo,

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |   |
|  | . |

Como vem

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  | | |
|  |  |
|  | . |

E, portanto,

Solução do problema 7

Sejam *a, b, c,* e 0 as coordenadas complexas de *A, B, C* e *D*, respetivamente.

Temos, então que ⇔ 

Como , sendo 

 e portanto, *w*1, *w*2, *w*3 estão alinhados.

Assim, existem reais positivos *α* e *β* tais que



isto é,  e, analogamente,  e  O único ponto *D* no interior de um triângulo acutângulo que satisfaz essas condições é o ortocentro.

Solução Problema 8.

Considere a circunferência centrada na origem e sejam *z*1, *z*2, …, *zn* os números complexos que representam os pontos. Podemos assumir que .

Considere ainda o seguinte polinômio



Então |*p*(*z*)| é o produto das distâncias do ponto representado pelo número complexo *z* aos pontos dados .

Logo, se *z* é um número complexo de módulo 1, então | *p*(*z*)| ≤ 2.

Sejam *w*1, *w*2,… *wn* as raízes *n*-ésimas da unidade.

Sabe-se que  para todo *k* = 1, 2,…,*n* – 1. Portanto Se *Q*(*w*) não é identicamente nulo, então, para algum *j*, *Q* (*wj*) é diferente de zero e tem parte real não negativa, pois *Q*(0) = 0 e *Q* tem no máximo *n* – 1 raízes. Consequentemente, , uma contradição.

Desta forma o polinômio *Q* é identicamente nulo e *p*(*z*) = *zn* + 1. As raízes *z*1, *z*2, …, *zn* do polinômio *p*(*z*) formam um *n*-ágono regular.

Solução Problema 9.

Sejam o triângulo dado; , , triângulos equiláteros com a mesma orientação que , digamos; e , os baricentros desses triângulos. Então



Para provarmos que *ζ*1*ζ*2*ζ*3 é equilátero, calculamos



= 

Portanto *ζ*1*ζ*2*ζ*3 é um triângulo equilátero.

Solução Problema 10.

Sejam e as coordenadas complexas do e , respetivamente. Consequentemente, e . Como é o simétrico de com relação a , satisfaz

 ⇔  (1)

Temos que



substituindo em (1), obtemos





onde *.* Analogamente



Como







e segue que e são colineares

1. 1,2,3 MOTTA, EDMILSON (1999). Aplicações dos números complexos à geometria, Brasil. [↑](#footnote-ref-1)
2. [↑](#footnote-ref-2)
3. [↑](#footnote-ref-3)