DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Olimpíadas envolvendo números complexos

Catarina Isabel Rosa Silva

Trabalho realizado no âmbito do Projeto Educacional II,
Disciplina do Mestrado em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientadora: Raquel Caseiro

Ano letivo 2011/2012

PROBLEMA 1

Proposição:

Sejam z_1, z_2 *e* z_3 *números complexos distintos. A medida do ângulo orientado entre* $\overrightarrow{z_1 z_2}$ *e* $\overrightarrow{z_1 z_3}$ *é igual ao* $arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

PROBLEMA:

Mostre que $\overrightarrow{z_1 z_2} \perp \overrightarrow{z_1 z_3} \Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ *é um imaginário puro* $\Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} + \frac{\overline{z_3 - z_1}}{\overline{z_2 - z_1}} = 0$.

PROBLEMA 2

Proposição: *A reta r, perpendicular a* $z_2 z_3$ *que passa pelo ponto* z_1 *é*

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \overline{\left(\frac{z - z_1}{z_3 - z_2}\right)} = -\frac{z - z_1}{z_3 - z_2}\right\}.$$

Utilizando a proposição anterior demonstre a proposição seguinte.

Proposição: *Seja* $\Delta z_1 z_2 z_3$ *um triângulo definido no plano complexo. O seu baricentro é*

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

PROBLEMA 3

Utilizando a proposição do problema anterior, prove a seguinte proposição.

Proposição: *Seja* $\Delta z_1 z_2 z_3$ *um triângulo definido no plano complexo. O seu circuncentro é*

$$z = \frac{|z_1|^2(z_3 - z_2) + |z_2|^2(z_1 - z_3) + |z_3|^2(z_2 - z_1)}{\overline{z_1}(z_3 - z_2) + \overline{z_2}(z_1 - z_3) + \overline{z_3}(z_2 - z_1)}.$$

PROBLEMA 4

Proposição: *Dois triângulos, $\Delta z_1z_2z_3$ e $\Delta w_1w_2w_3$, são semelhantes, se e somente se,* $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{w_2-w_1}{w_3-w_1}$.

Utilizando a proposição anterior demonstre o seguinte teorema.

Teorema: *Dois triângulos são semelhantes, $\Delta z_1z_2z_3 \sim \Delta w_1w_2w_3$, se e só se o determinante*

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} \textit{ é nulo.}$$

PROBLEMA 5

Teorema: *Os afixos dos complexos z_1 , z_2* e *z_3 são os vértices de um triângulo equilátero se e só se $z_1 + wz_2 + w^2z_3 = 0$ ou $z_1 + w^2z_2 + wz_3 = 0$, onde w é uma raiz cúbica de unidade diferente de 1.*

Utilizando o teorema anterior demonstre o teorema seguinte.

Teorema: Um triângulo *$\Delta z_1z_2z_3$ é equilátero se e somente se $\Delta z_1z_2z_3 \sim \Delta z_3z_1z_2$, ou seja,*

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_3 & 1 \\ z_2 & z_1 & 1 \\ z_3 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

PROBLEMA 6

Proposição: *Sejam z_1, z_2, z_3 e z_4 vértices de um quadrilátero inscrito numa circunferência, posicionados pela ordem, z_1, z_2, z_3 e z_4 então*

$$[z_1, z_3, z_2, z_4] = \frac{(z_1-z_2)}{(z_1-z_4)} / \frac{(z_3-z_2)}{(z_3-z_4)} = \lambda < 0.$$

Utilizando a proposição anterior, demonstre o seguinte teorema, Teorema de Ptolemeu.

Teorema: *A soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos do quadrilátero $[z_1z_2z_3z_4]$ é igual ao produto dos comprimentos das diagonais, ou seja,*

$$|z_1 - z_3||z_2 - z_4| = |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_3 - z_2|.$$

PROBLEMA 7 (Olimpíada Chinesa 98)[1]

Seja D um ponto no interior de um triângulo acutângulo ABC, com

$$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA.$$

Determine quais são as possíveis posições que D pode ocupar.

PROBLEMA 8 (Olimpíada Universitária Húngara 1995) [2]

PROBLEMA

São dados n pontos na circunferência unitária de modo que o produto das distâncias de qualquer ponto da circunferência a estes pontos é menor ou igual a 2. Prove que os pontos são vértices de um n–ágono regular.

PROBLEMA 9 (Teorema do Napoleão)

PROBLEMA

Utilizando o teorema presente no Problema 5 demonstre o seguinte teorema.

Teorema (Napoleão): Se sobre cada lado de um triângulo qualquer, se traçar um triângulo equilátero externamente ao triângulo dado, então os centros desses três triângulos equiláteros serão os vértices de um quarto triângulo equilátero.

PROBLEMA 9 (Banco/ IMO 98)[3]

Seja ΔABC um triângulo, H o seu ortocentro, O o seu circuncentro e R o seu circunraio. Seja D o simétrico de A com relação a BC, E o simétrico de B com relação a AC e F o simétrico de C com relação a AB.

Prove que D, E e F são colineares se, e somente se, $OH = 2R$.

[1,2,3] MOTTA, EDMILSON (1999). Aplicações dos números complexos à geometria, Brasil.

SOLUÇÃO PROBLEMA 1.

Sejam $\overrightarrow{z_1 z_2}$ e $\overrightarrow{z_1 z_3}$ dois vetores perpendiculares então a medida do ângulo orientado entre eles é de $\frac{\pi}{2}$, ou seja,

$$\arg(z_2 - z_1) = \arg(z_4 - z_3) \pm \frac{\pi}{2},$$

que é equivalente a

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda i \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \text{ é um imaginário puro}$$

e, por isso, também se pode escrever da forma

$$\overline{\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)} = -\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} + \frac{\overline{z_3 - z_1}}{\overline{z_2 - z_1}} = 0.$$

SOLUÇÃO PROBLEMA 2.

Como o baricentro é calculado à custa da interseção das medianas de um triângulo,

$$\begin{cases} \overline{\left(\dfrac{z - z_1}{z_1 - \dfrac{z_2 + z_3}{2}}\right)} = \dfrac{z - z_1}{z_1 - \dfrac{z_2 + z_3}{2}} \\ \overline{\left(\dfrac{z - z_2}{z_2 - \dfrac{z_1 + z_3}{2}}\right)} = \dfrac{z - z_2}{z_2 - \dfrac{z_1 + z_3}{2}} \\ \overline{\left(\dfrac{z - z_3}{z_3 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}}\right)} = \dfrac{z - z_3}{z_3 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}} \end{cases}.$$

simplificando uma das equações, por exemplo a primeira

obtêm-se

$$\bar{z}(2z_1 - z_2 - z_3) - z(\overline{2z_1} - \overline{z_2} - \overline{z_3}) = z_1(\overline{z_2} + \overline{z_3}) - \overline{z_1}(z_2 + z_3).$$

Deste modo, têm-se

$$\begin{cases} \bar{z}(2z_1 - z_2 - z_3) - z(\overline{2z_1} - \overline{z_2} - \overline{z_3}) = z_1(\overline{z_2} + \overline{z_3}) - \overline{z_1}(z_2 + z_3) \\ \bar{z}(2z_2 - z_1 - z_3) - z(\overline{2z_2} - \overline{z_1} - \overline{z_3}) = z_2(\overline{z_1} + \overline{z_3}) - \overline{z_2}(z_1 + z_3). \\ \bar{z}(2z_3 - z_2 - z_1) - z(\overline{2z_3} - \overline{z_2} - \overline{z_1}) = z_3(\overline{z_2} + \overline{z_1}) - \overline{z_3}(z_2 + z_1) \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação

$$\bar{z} = \frac{z_1(\overline{z_2} + \overline{z_3}) - \overline{z_1}(z_2 + z_3) + z(\overline{2z_1} - \overline{z_2} - \overline{z_3})}{(2z_1 - z_2 - z_3)}$$

Substituindo na segunda equação o resultado anterior têm-se

$$\left[\frac{z_1(\overline{z_2} + \overline{z_3}) - \overline{z_1}(z_2 + z_3) + z(\overline{2z_1} - \overline{z_2} - \overline{z_3})}{(2z_1 - z_2 - z_3)}\right](2z_2 - z_1 - z_3) - z(\overline{2z_2} - \overline{z_1} - \overline{z_3}) = z_1(\overline{z_1} + \overline{z_3}) - \overline{z_1}(z_1 + z_3)$$

Simplificando,

$$z = \frac{[z_1(\overline{z_1} + \overline{z_3}) - \overline{z_1}(z_1 + z_3)](2z_1 - z_2 - z_3) + [z_1(\overline{z_2} + \overline{z_3}) - \overline{z_1}(z_2 + z_3)](2z_2 - z_1 - z_3)}{[(\overline{2z_1} - \overline{z_2} - \overline{z_3})(2z_2 - z_1 - z_3) - (\overline{2z_2} - \overline{z_1} - \overline{z_3})(2z_1 - z_2 - z_3)]}$$

Ou seja,

$$z = \frac{(z_1 + z_2 + z_3)[z_1(\overline{z_3} - \overline{z_2}) + z_2(\overline{z_1} - \overline{z_3}) + z_3(\overline{z_2} - \overline{z_1})]}{3[z_1(\overline{z_3} - \overline{z_2}) + z_2(\overline{z_1} - \overline{z_3}) + z_3(\overline{z_2} - \overline{z_1})]}$$

E, portanto, concluímos que o baricentro é dado por

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

<u>SOLUÇÃO PROBLEMA 3.</u>

O circuncentro é a da interseção das mediatrizes dos lados do triângulo. Basta assim considerar as equações das retas das mediatrizes e encontrar o ponto comum às mesmas. Deste modo, o circuncentro é a solução do sistema:

$$\begin{cases} \overline{\left(\dfrac{z - \frac{z_1 + z_2}{2}}{z_1 - z_2}\right)} = -\dfrac{z - \frac{z_1 + z_2}{2}}{z_1 - z_2} \\ \overline{\left(\dfrac{z - \frac{z_2 + z_3}{2}}{z_2 - z_3}\right)} = -\dfrac{z - \frac{z_2 + z_3}{2}}{z_2 - z_3} \\ \overline{\left(\dfrac{z - \frac{z_1 + z_3}{2}}{z_3 - z_1}\right)} = -\dfrac{z - \frac{z_1 + z_3}{2}}{z_3 - z_1} \end{cases}.$$

Simplificando uma das equações, por exemplo a primeira

$$\overline{\left(\frac{z - \frac{z_1 + z_2}{2}}{z_1 - z_2}\right)} = -\frac{z - \frac{z_1 + z_2}{2}}{z_1 - z_2}$$

obtem-se

$$\bar{z}(z_1 - z_2) + z(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = |z_1|^2 - |z_2|^2.$$

Assim, o sistema acima é equivalente a

$$\begin{cases} \bar{z}(z_1 - z_2) + z(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = |z_1|^2 - |z_2|^2 \\ \bar{z}(z_2 - z_3) + z(\overline{z_2} - \overline{z_3}) = |z_2|^2 - |z_3|^2. \\ \bar{z}(z_3 - z_1) + z(\overline{z_3} - \overline{z_1}) = |z_3|^2 - |z_1|^2 \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação em ordem a $\bar{z}$ vem,

$$\bar{z} = \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2 - z(\overline{z_1} - \overline{z_2})}{(z_1 - z_2)}.$$

Substituindo na segunda equação o resultado anterior tem-se

$$\left(\frac{|z_1|^2 - |z_2|^2 - z(\overline{z_1} - \overline{z_2})}{(z_1 - z_2)}\right)(z_2 - z_3) + z(\overline{z_2} - \overline{z_3}) = |z_2|^2 - |z_3|^2,$$

ou seja,

$$(|z_1|^2 - |z_2|^2)(z_2 - z_3) - z(\overline{z_1} - \overline{z_2})(z_2 - z_3) + z(\overline{z_2} - \overline{z_3})(z_2 - z_3) = (\overline{z_2} - \overline{z_3})(|z_2|^2 - |z_3|^2),$$

de onde se obtém,

$$z[(\overline{z_2} - \overline{z_3})(z_2 - z_3) - (\overline{z_1} - \overline{z_2})(z_2 - z_3)] = (\overline{z_2} - \overline{z_3})(|z_2|^2 - |z_3|^2) - (|z_1|^2 - |z_2|^2)(z_2 - z_3).$$

Portanto, que o circuncentro é dado por

$$z = \frac{|z_1|^2(z_3 - z_2) + |z_2|^2(z_1 - z_3) + |z_3|^2(z_2 - z_1)}{\overline{z_1}(z_3 - z_2) + \overline{z_2}(z_1 - z_3) + \overline{z_3}(z_2 - z_1)}.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Os triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta w_1 w_2 w_3$ são semelhantes se, e somente se, $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$. Ora,

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 - z_1 & w_2 - w_1 & 1-1 \\ z_3 - z_1 & w_3 - w_1 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 - z_1 & w_2 - w_1 & 0 \\ z_3 - z_1 & w_3 - w_1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 - z_1 & w_2 - w_1 & 0 \\ z_3 - z_1 & w_3 - w_1 & 0 \end{vmatrix} = (z_2 - z_1)(w_3 - w_1) - (z_3 - z_1)(w_2 - w_1).$$

Portanto, $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$ se e somente se $\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

Pelo Teorema apresentado no problema anterior, sabemos que $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta z_3 z_1 z_2$ se e somente se

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_3 & 1 \\ z_2 & z_1 & 1 \\ z_3 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Simplificando a equação acima vem

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_1 z_2 + z_2 z_1 + z_2 z_3) = 0.$$

Como $w^2 + w + 1 = 0$, então a equação acima pode reescrever-se como

$$(z_1 + z_2 w + z_3 w^2)(z_1 + z_2 w^2 + z_3 w) = 0.$$

Concluímos que $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta z_3 z_1 z_2$ se e somente se

$$(z_1 + z_2 w + z_3 w^2) = 0 \text{ ou } (z_1 + z_2 w^2 + z_3 w) = 0.$$

Pelo teorema sugerido estas são as condições necessárias e suficientes para que o triângulo seja equilátero.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

Pela Proposição sugerida $[z_1, z_3, z_2, z_4] < 0$,ou seja,

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) = k(z_1 - z_4)(z_3 - z_2), \; k < 0,$$

logo,

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_3 - z_2| &= |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_3 - z_2| \\ &= |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)| + |(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)| \\ &= |k(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)| + |(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)| \\ &= -k|(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)| + |(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)| \\ &= -(k-1)|(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)|. \end{aligned}$$

Como $k < 0$ vem

$$|z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_3 - z_2| = |k - 1||(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)|$$

$$= \quad |(k-1)(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)|$$

$$= \quad |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) - (z_1 - z_4)(z_3 - z_2)|$$

$$= \quad |(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)|$$

$$= \quad |(z_1 - z_3)||(z_2 - z_4)|.$$

E, portanto,

$$|z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_3 - z_2| = |(z_1 - z_3)||(z_2 - z_4)|$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 7

Sejam *a, b, c,* e 0 as coordenadas complexas de *A, B, C* e *D*, respetivamente.

Temos, então que $DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA \Leftrightarrow$ $|a \cdot b \cdot (b-a)| + |b \cdot c \cdot (c-b)| + |c \cdot a \cdot (a-c)| = |(b-a)(c-b)(a-c)| (*)$

Como $ab(b-a) + bc(c-b) + ca(a-c) = -(b-a)(c-b)(a-c)$, sendo $w_1 = ab(b-a)$,

$w_2 = bc(c-b), w_3 = ca(a-c), (*) \Leftrightarrow |w_1| + |w_2| + |w_3| = |w_1 + w_2 + w_3|$ e portanto, w_1, w_2, w_3 estão alinhados.

Assim, existem reais positivos α e β tais que

$$\left|\begin{array}{l} w_1 = \alpha w_2 \\ \\ w_1 = \beta w_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} ab(b-a) = \alpha bc(c-b) \\ \\ ab(b-a) = \beta ca(a-c) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a(b-a) = \alpha c(c-b) \\ \\ b(b-a) = \beta c(a-c) \end{array}\right. \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{b-c}{a-c},$$

isto é, $\angle A\hat{C}B = 180^\circ - \angle A\hat{D}B$ e, analogamente, $\angle A\hat{B}C = 180^\circ - \angle A\hat{D}C$ e $\angle B\hat{A}C = 180^\circ - \angle B\hat{D}C$. O único ponto *D* no interior de um triângulo acutângulo que satisfaz essas condições é o ortocentro.

SOLUÇÃO PROBLEMA 8.

Considere a circunferência centrada na origem e sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ os números complexos que representam os pontos. Podemos assumir que $(-1)^n \cdot z_1 \cdot z_2 \ldots z_n = 1$.

Considere ainda o seguinte polinômio

$$p(w) = (w - z_1)(w - z_2)\ldots(w - z_n) = w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots + a_{n-1} w + 1 = w^n + Q\ (w) + 1$$

Então $|p(z)|$ é o produto das distâncias do ponto representado pelo número complexo z aos pontos dados .

Logo, se z é um número complexo de módulo 1, então $|\,p(z)\,| \leq 2$.

Sejam w_1, w_2,… w_n as raízes n-ésimas da unidade.

Sabe-se que $w_1^k + w_2^k + \ldots + w_n^k = 0$ para todo k = 1, 2,…,n – 1. Portanto $Q(w_1) + Q(w_2) + \ldots + Q(w_n) = 0.$ Se $Q(w)$ não é identicamente nulo, então, para algum j, $Q\ (w_j)$ é diferente de zero e tem parte real não negativa, pois $Q(0) = 0$ e Q tem no máximo n – 1 raízes. Consequentemente, $|p(w_j)| = |2 + Q\ \ (w_j)| > 2$, uma contradição.

Desta forma o polinômio Q é identicamente nulo e $p(z) = z^n + 1$. As raízes z_1, z_2, …, z_n do polinômio $p(z)$ formam um n-ágono regular.

<u>SOLUÇÃO PROBLEMA 9.</u>

Sejam $\Delta z_1 z_2 z_3$ o triângulo dado; $\Delta w_1 z_3 z_2$, $\Delta z_3 w_2 z_1$, $\Delta z_2 z_1 w_3$ triângulos equiláteros com a mesma orientação que $\Delta 1 \omega \omega_2$, digamos; e $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, os baricentros desses triângulos. Então

$$\begin{cases} w_1 + \omega\, z_3 + \omega^2 z_2 = 0 \\ z_3 + \omega\, w_2 + \omega^2 z_1 = 0 \\ z_2 + \omega\, z_1 + \omega^2 w_3 = 0 \end{cases}$$

Para provarmos que $\Delta\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ é equilátero, calculamos

$$\zeta_1 + \omega\zeta_2 + \omega^2\zeta_3 = \frac{1}{3}(w_1 + z_3 + z_2) + \frac{\omega}{3}(z_3 + w_2 + z_1) + \frac{\omega^2}{3}(z_2 + z_1 + w_3)$$

$$= \frac{1}{3}((w_1 + \omega\, z_3 + \omega^2 z_2) + (z_3 + \omega\, w_2 + \omega^2 z_1) + (z_2 + \omega\, z_1 + \omega^2 w_3)) = 0.$$

Portanto $\Delta\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ é um triângulo equilátero.

Solução Problema 10.

Sejam a, b, c, h e 0 as coordenadas complexas do A, B, C, H e O, respetivamente. Consequentemente,$a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = R^2$ e $h = a + b + c$. Como D é o simétrico de A com relação a BC, d satisfaz

$$\frac{d-b}{c-b} = \overline{\left(\frac{a-b}{c-b}\right)} \Leftrightarrow \left(\bar{b}-\bar{c}\right)d - (b-c)\bar{a} + \left(b\bar{c} - \bar{b}c\right) = 0. \qquad (1)$$

Temos que

$$\bar{b} - \bar{c} = -\frac{R^2(b-c)}{bc} \text{ e } b\bar{c} - \bar{b}c = \frac{R^2(b^2-c^2)}{bc},$$

substituindo em (1), obtemos

$$d = \frac{-bc+ca+ab}{a} = \frac{k-2bc}{a},$$

$$\bar{d} = \frac{R^2(-a+b+c)}{bc} = \frac{R^2(h-2a)}{bc},$$

onde $k = bc + ca + ab$. Analogamente

$$e = \frac{k-2ca}{b},\ \bar{e} = \frac{R^2(h-2b)}{ca},\ f = \frac{k-2ab}{c} \text{ e } \bar{f} = \frac{R^2(h-2c)}{ab}.$$

Como

$$\Delta = \begin{vmatrix} d & \bar{d} & 1 \\ e & \bar{e} & 1 \\ f & \bar{f} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e-d & \bar{e}-\bar{d} \\ f-d & \bar{f}-\bar{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{(b-a)(k-2ab)}{ab} & \frac{R^2(a-b)(h-2c)}{abc} \\ \frac{(c-a)(k-2ca)}{ca} & \frac{R^2(a-c)(h-2b)}{abc} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{R^2(c\text{-}a)(a-b)}{a^2b^2c^2} \times \begin{vmatrix} -(ck\text{-}2abc) & (h-2c) \\ (bk-2abc) & -(h-2b) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-R^2(b-c)(c-a)(a-b)(hk-4abc)}{a^2b^2c^2}$$

e $\bar{h} = \dfrac{R^2k}{abc}$ segue que D, E e F são colineares

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \Delta = 0 \\ &\Leftrightarrow hk - 4abc = 0 \\ &\Leftrightarrow h\bar{h} = 4R^2 \\ &\Leftrightarrow OH = 2R \end{aligned}$$