FCTUC FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Departamento de Matemática

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Padrões no Ensino Básico

Ensino da Matemática I

Professora : Helena Maria Mamede Albuquerque

Trabalho elaborado por:

Tânia Isabel Duarte Lopes

Nº de estudante 2007107124

2011/2012

FCTUC FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Departamento de Matemática

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Padrões e Regularidades no Ensino Básico

Professora : Helena Maria Mamede Albuquerque

Trabalho elaborado por:

Tânia Isabel Duarte Lopes

Nº de estudante 2007107124

Conteúdo

1. Introdução

Resumidamente, os padrões no Ensino Básico são regularidades que se vão encontrando ao longo do percurso escolar em todas as áreas, nomeadamente na Matemática.

Os padrões e as regularidades desempenham um papel importante no ensino da matemática, sobretudo a partir do trabalho de Lynn Steen (1988) quando chamou à matemática a ciência dos padrões.

Se pensarmos bem, desde muito novos que usamos padrões, nomeadamente na sequências de desenho, como por exemplo, quando se tem uma imagem azul, depois uma verde, depois uma vermelha e de seguida uma azul e adivinhar a que viria a seguir.

O Ensino Básico é composto por três ciclos: 1º ciclo (do 1º ao 4º ano de escolaridade), 2º ciclo (5º e 6º ano de escolaridade) e 3º ciclo (do 7º ao 9º ano de escolaridade).

A Matemática é uma ciência que lida com os objectos e relações abstractas. Esta constituiu-se como autónoma ao estudo dos números e operações, das formas geométricas, das estruturas e regularidades, da variação, do acaso e da incerteza.

2. O que é um padrão na Matemática

Normalmente quando se fala de padrão associa-se logo a padrões visuais tais como se vê em tecidos, papel de parede e peças de arte. O conceito de padrão não se encontra apenas nestes exemplos, o padrão é usado também quando se fala de uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades.

Um dos objectivos da Matemática é descobrir a regularidade onde no meio da desordem e confusão seja possível tirar a estrutura e a invariância. Há mesmo quem diga que a essência da matemática é descobrir padrões e o nosso espirito parece já estar direccionado para a procura de relações.

3. A IMPORTÂNCIA DOS PADRÕES

Dá que pensar o facto de a Matemática ser conhecida como a ciência dos padrões?!

Os padrões são úteis para a exploração de situações de repetição e do campo da geometria.

"Os padrões permitem que os estudantes construam uma imagem mais positiva da Matemática porque apelam fortemente a que desenvolvam o seu sentido estético e a criatividade, estabeleçam várias conexões entre os diferentes temas, promovam uma melhor compreensão das suas capacidades matemáticas, desenvolvam a capacidade de classificar e ordenar informação e compreendam a ligação entre a matemática e o mundo em que vivem.

Ser professor de Matemática significa, também, seleccionar, implementar e apresentar tarefas que maximizem o potencial de aprendizagem dos alunos e que proporcionem a oportunidade de:

- Usar múltiplas representações de um padrão – concreta, pictórica e simbólica de uma representação para outra;
- Averiguar se uma lista de números mostra alguma regularidade;
- Descobrir o padrão numa sequência;
- Descrever o padrão oralmente e por escrito;
- Continuar uma sequência;
- Prever termos numa sequência;
- Generalizar;
- Construir uma sequência." (Vale, Pimentel, *et al*; 2011)

4. COMPETÊNCIAS MATEMÁTICAS[1]

A matemática é um património cultural da humanidade e um modo de pensar. A sua apropriação é um direito de todos. Todas as crianças e jovens devem ter possibilidade de contactar com as ideias e os métodos fundamentais da matemática e apreciar o seu valor e a sua natureza bem como desenvolver a capacidade de usar a

[1] www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/data/.../comp_matematica02.pdf

matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar, assim como a autoconfiança necessário para o fazer.

Ser matematicamente competente envolve um conjunto de atitudes, de capacidades e de conhecimentos relativos à matemática. Esta competência matemática que todos devem desenvolver, no seu percurso ao longo da educação básica, inclui:

- A predisposição para raciocinar matematicamente, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica;
- A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação;
- A compreensão das noções de conjectura, teorema e demonstração, assim como das consequências do uso de deferentes definições;
- A predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensinar estratégias alternativas;
- A aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, consoante os casos, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou os instrumentos tecnológicos;
- A tendência para procurar ver e apreciar a estrutura abstracta que está presente numa situação, seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, à natureza ou à arte, envolva ela elementos numéricos, geométricos ou ambos;
- A tendência para usar a matemática, em combinação com outros saberes, na compreensão de situações da realidade, bem como o sentido crítico relativamente à utilização de procedimentos e resultados matemáticos.

5. A Matemática no currículo do Ensino Básico[2]

Em 2001, o Currículo Nacional do Ensino Básico introduziu modificações curriculares importantes em relação ao programa anterior, nomeadamente nas finalidades e nos objectivos de aprendizagem, valorizando a noção de competência

[2] http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

matemática, e na forma como apresenta os temas matemáticos a abordar, o desenvolvimento do conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática nos últimos quinze anos, e, a necessidade de melhorar a articulação entre os programas dos três ciclos são algumas das razões que justificavam a sua revisão (e modificações).

Havia uma necessidade de intervenção urgente, que corrigisse os principais problemas existentes, daí procedeu-se a um reajustamento, tomando como ponto de partida o anterior.

As principais finalidades da Matemática são:

A. Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados.

Esta finalidade deve ser entendida como incluindo o desenvolvimento nos alunos da:

- compreensão de conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos e da capacidade de os utilizar na análise, interpretação e resolução de situações em contexto matemático e não matemático;
- capacidade de analisar informação e de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem processos de modelação matemática;
- capacidade de abstracção e generalização e de compreender e elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos;
- capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega.

B. Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.

Esta finalidade deve ser entendida como incluindo o desenvolvimento nos alunos de:

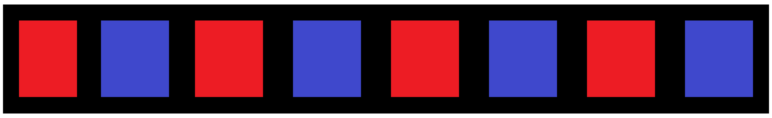
- autoconfiança nos seus conhecimentos e capacidades matemáticas, e autonomia e desembaraço na sua utilização;

- à-vontade e segurança em lidar com situações que envolvam Matemática na vida escolar, corrente, ou profissional;
- interesse pela Matemática e em partilhar aspectos da sua experiência nesta ciência;
- compreensão da Matemática como elemento da cultura humana, incluindo aspectos da sua história;
- capacidade de reconhecer e valorizar o papel da Matemática nos vários sectores da vida social e em particular no desenvolvimento tecnológico e científico;
- capacidade de apreciar aspectos estéticos da Matemática.

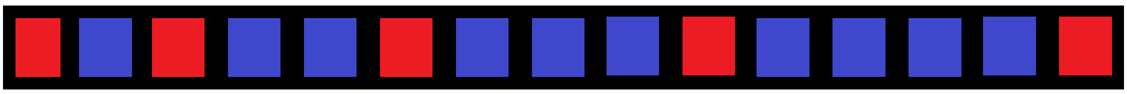
6. Padrões no Programa de Matemática no Ensino Básico[3]

Existe vários padrões no programa de Matemática, padrões de repetição, padrões de crescimento e padrões visuais aos padrões numéricos.

Um padrão de repetição é um padrão no qual há um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente. Por exemplo, um padrão muito simples é,



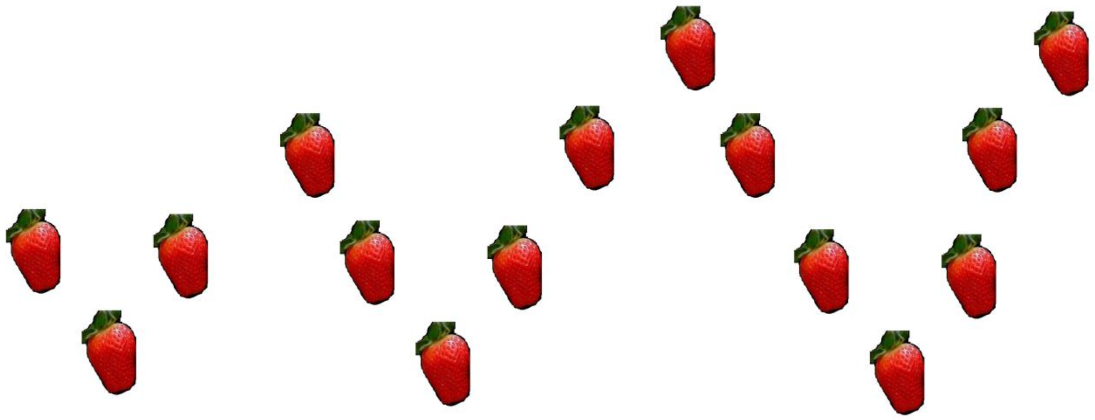
Se se pedir aos alunos para continuarem este padrão eles facilmente o farão, como sendo um padrão ABABABA…



Aqui, em cima, o padrão será ABABBABBBABBBBA…

Um padrão de crescimento é um padrão onde cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior. Estes padrões, em particular, fornecem uma grande diversidade de situações que proporcionam explorações muito ricas e variadas. Há padrões de crescimento lineares e não lineares, ou seja, a sua tradução pode ser ou não uma expressão polinomial do 1ºgrau. Por exemplo,

[3] Com base no livro “Padrões em Matemática: Uma proposta didáctica no âmbito do novo programa para o Ensino Básico”



A questão que se coloca é, qual será a 4ª e a 5ª figura dos morangos em V?

Outro exemplo que se pode colocar seria dizer qual os três termos seguintes da sequência numérica 1,2,4,… Aqui pode haver várias respostas, tais como:

1,2,4,8,16,32 (duas vezes o número anterior)

1,2,4, 7,11,16 (o anterior mais um de diferença entre cada termo)

1,2,4,5,7,8 (entre dois termos adiciona-se um, entre os outros dois termos adiciona-se dois)

1,2,4,1,2,4 (sequência 1,2,4 de três em termos)

1,2,4,4,2,1 (sequência de 1,2,4 e depois do seu inverso, ou seja, 4,2,1)

Como este exemplo têm várias soluções, é muito provável cada aluno dar uma solução diferente e isso faz o aluno desenvolver as suas capacidades e perceberem que há mais do que um modo de ver um padrão e de o explicarem.

Facilmente se passa dos padrões visuais para os numéricos, por exemplo, utilizam-se palitos para construir a sequência de figuras,

Então coloca-se assim as seguintes questões, quantos palitos são necessários para construir a figura seguinte? Quantos palitos são necessários para construir a vigésima figura?

Figura	Número de palitos		Número de palitos
1	4	+3	4
2	7	+3	4+3
3	10	+3	7+3
4	13	+3	10+3
5	16	+3	13+3
6	19	+3	16+3
7	22	+3	19+3
….	…	…	…
N	…	…	4+(n-1)*3

7. ALGUMAS TAREFAS DO 1º CICLO[4]

Um exemplo de uma tarefa para ser feita a partir do 1º ano de escolaridade.

Há 20 meninos numa turma. Quantos olhos há na turma?

Material: Molduras do 10 (do 20).

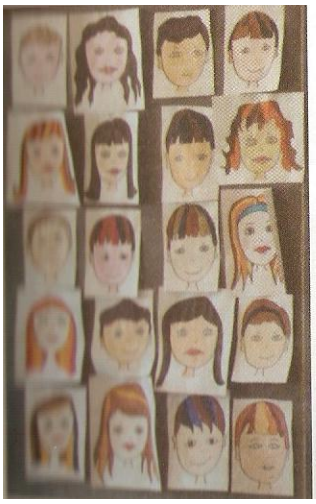
Tópicos matemáticos envolvidos:

- Relações numéricas;
- Operações e propriedades;
- Expressões numéricas.

Desenvolvimento e possíveis resoluções:

Pode aproveitar-se a disposição da moldura do 10 para levar os alunos a resolver, com mais facilidade, várias situações problemáticas.

O episódio que se relata ocorreu numa turma do 1ºano em que, previamente, se fez um estudo de recolha e organização de dados sobre a cor dos olhos e em que se chegou à conclusão de que, dos 22 alunos, havia 20 com olhos castanhos. A disposição das imagens dos 20 alunos sugeriu à professora a sua utilização para a resolução de vários problemas. Um deles foi a determinação do número de olhos daquele grupo de meninos. Os alunos, reconhecendo que em cada coluna havia cinco meninos, e portanto 10 olhos, resolveram o problema adicionando 10+10+10+10.



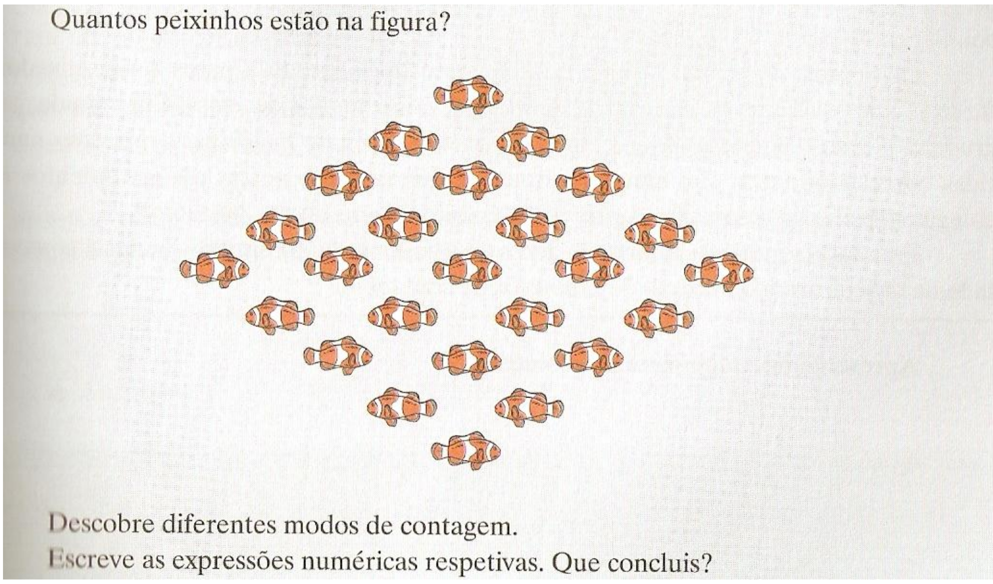
Em seguida, a professora retirou as imagens dos meninos, procurando que os alunos contassem o número de meninos de uma forma expedita. Posteriormente, retirou as imagens das meninas para resolver o problema inverso. Houve então um rearranjo da disposição, seguindo de vários modos de contagem e respectivas expressões numéricas.

[4] Retirado do livro "Padrões em Matemática: Uma proposta didáctica no âmbito do novo programa para o Ensino Básico"

Foram depois acrescentados os meninos da turma que não tinham olhos castanhos e feita a contagem do total de rapazes.

Observe-se que muitas das contagens, traduzidas pelas expressões numéricas, tomam como referência o número 5 e /ou os seus múltiplos: 10, 15 e 20.

Um exemplo de uma tarefa para ser feita a partir do 2º ano de escolaridade.



Material: Imagem ampliada/projector

Tópicos matemáticos envolvidos:

- Decomposição de números;
- Relações numéricas;
- Operações e propriedades;
- Expressões numéricas;
- Orientação espacial;
- Simetria;
- Figuras geométricas.

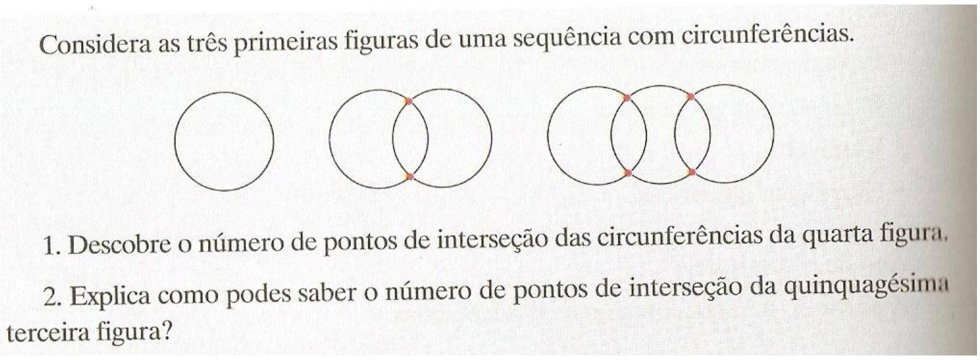
Desenvolvimento e possíveis resoluções:

As crianças trabalham em pares. Cada par recebe uma imagem ampliada em tamanho A4. Poderá usar-se o retroprojector e acetatos ou colocar-se a imagem numa saqueta de plástico transparente de modo a poder utilizar marcadores de quadro branco e apagar com lenço de papel.

Os alunos, dos 2º e 3ºanos, trabalhando inicialmente a pares e incentivados a fazerem mais que uma descoberta, encontraram vários modos de “ver”. Em seguida, cada grupo expôs aos colegas o modo como pensou e registou no quadro as expressões numéricas correspondentes. Em algumas situações, tiveram de prestar esclarecimento aos colegas sobre a sua resolução. A professora apoiou alguns alunos nesta fase.

Esta tarefa motivou os alunos, que se mostraram muito entusiasmados e com vontade de descobrirem o máximo de hipóteses de contagem, assim como mostram as imagens a baixo.

Um exemplo de uma tarefa que se pode realizar a partir do 3º ano de escolaridade.


Considera as três primeiras figuras de uma sequência com circunferências.

1. Descobre o número de pontos de interseção das circunferências da quarta figura.

2. Explica como podes saber o número de pontos de interseção da quinquagésima terceira figura?

Material: Papel e Lápis

Tópicos matemáticos envolvidos:

- Números pares;
- Relações numéricas;
- Expressões numéricas;
- Variável;
- Expressões algébricas.

Um exemplo de uma tarefa que se pode realizar a partir do 4ºano de escolaridade.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

1. Desenha mais cruzes na tabela. Compara o número do centro com a soma dos cinco números que compõem cada cruz.
2. Regista a informação numa tabela.
3. Que padrão descobriste?

Material: Tabelas da multiplicação e Calculadora.

Tópicos matemáticos envolvidos:

- Decomposição de números;
- Relações numéricas;
- Números pares e ímpares;
- Multiplicação;
- Múltiplos de um número.

Desenvolvimento e possíveis resoluções:

Os alunos devem organizar-se em grupos. Inicialmente devem começar a experimentar com algumas cruzes particulares e verificar, para cada caso, que números estão envolvidos. Vamos experimentar as cruzes centradas nos números 14 e 35.

	12	
7	14	21
	16	

	28	
30	35	40
	42	

Construindo uma tabela com os casos observados, obtém-se:

Número no centro da cruz	Soma dos cinco números da cruz
8	6 + 4 + **8** + 12 + 10 = 40
10	5 + 8 + **10** + 12 + 15 = 50
14	12 + 7 + **14** + 21 + 16 = 70
35	30 + 28 + **35** + 42 + 40 = 175

Observando o número central de cada cruz e a soma respectiva, pode dizer-se que os números estão relacionados e que a conjectura que se pode fazer é que todos os números da cruz têm como soma o quíntuplo do número central:

$$40 = 5 * 8$$

$$50 = 5 * 10$$

$$70 = 5 * 14$$

$$175 = 5 * 35$$

Será sempre assim?

Experimentemos mais algumas cruzes. Por exemplo, a cruz 30 e a cruz 40.

	25	
24	30	36
	35	

	35	
32	40	48
	45	

25 + 24 + 30 + 36 + 35=

= 150 = 5 * 30

35 + 32 + 40 + 48 + 45 =

= 200 = 5 * 40

A conjectura verifica-se: a soma de todos os números da cruz é igual ao quíntuplo do número central.

Por que razão a conjectura é válida?

Como se relacionam os cinco números que surgem em cada cruz?

Em qualquer cruz, os três números na horizontal pertencem à mesma linha da tabuada e, por isso, serão sempre da forma ka, k (a + 1) e k(a + 2). Os outros dois números em falta pertencem à coluna do numero k(a + a), mas estão em duas linhas distintas; uma acima e outra abaixo. Assim, podem representar-se por (k - 1)(a + 1) e (k + 1)(a + 1).

	(k - 1)(a + 1)	
Ka	k(a + 1)	k(a + 2)
	(k + 1)(a + 1)	

Vamos adicionar os cinco números da cruz.

$$(k - 1)(a + 1) + ka + k(a + 1) + k(a + 2) + (k + 1)(a + 1).$$

Efectuando todos os cálculos temos:

$$Ka + k - a - 1 + ka + ka + k + ka + 2k + ka + k + a + 1 = 5ka + 5k = 5k(a + 1)$$

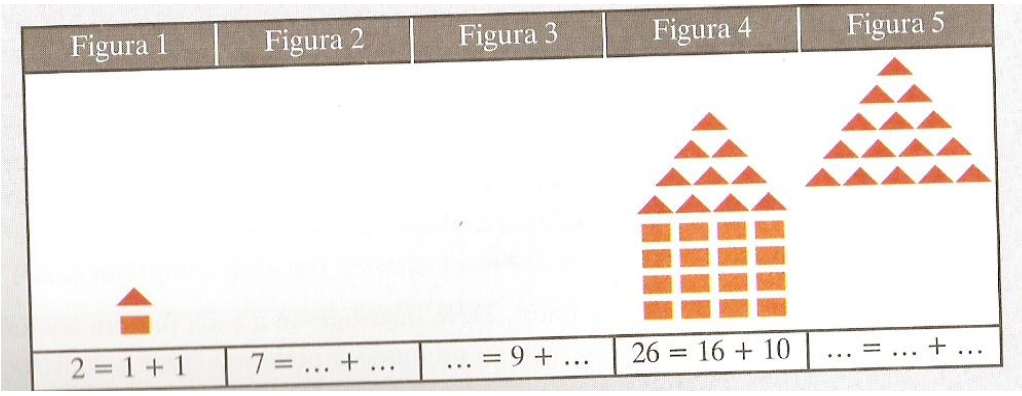
O que prova que, para qualquer cruz, a soma dos todos os números é igual ao quíntuplo do número central.

8. ALGUMAS TAREFAS DO 2º CICLO[5]

Um exemplo de uma tarefa que se pode realizar a partir do 5ºano de escolaridade.

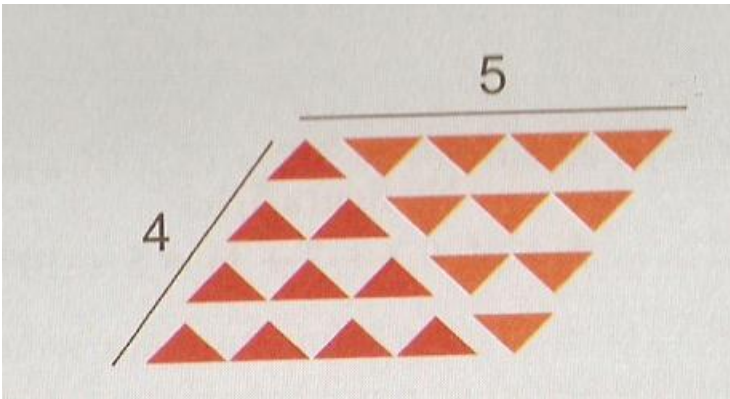
Considera a sequência seguinte:

[5] Retirado do livro "Padrões em Matemática: Uma proposta didáctica no âmbito do novo programa para o Ensino Básico"



1) Esboça as figuras em falta, sabendo que seguem a mesma lei de formação.

   Repara que:



2) Seguindo os exemplos, completa a tabela com os números adequados.

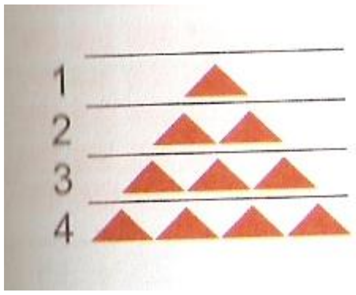
3) Por quantos  e  é composta a figura 7? E a figura 20? E a figura de uma ordem qualquer n? Apresenta o teu raciocínio.

Material: Ficha de trabalho e peças (poe exemplo polidron) que simulem os tijolos e as telhas

Tópicos matemáticos envolvidos:

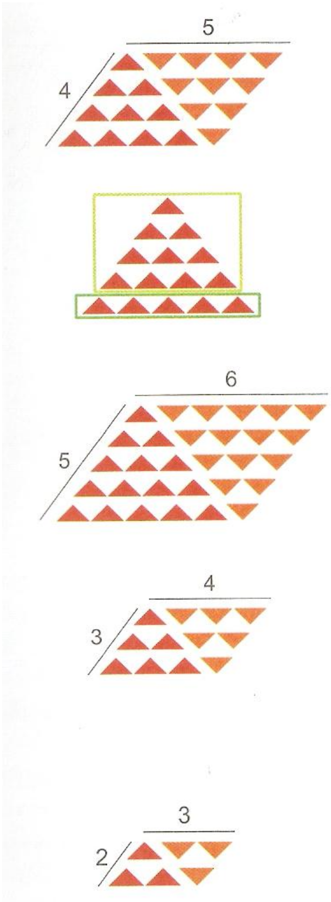
- Relações numéricas;
- Números figurados – triangulares e quadrados;
- Área;
- Potências;
- Expressões numéricas;
- Variável;

- Expressões algébricas.



Desenvolvimento e possíveis resoluções:

Analisando a figura 4, verifica-se que há $16=4*4=4^2$ tijolos e, na primeira fila de telhas, há tantas telhas como tijolos: 4. Depois, de fila para fila, o número de telhas diminui uma unidade, num total de 10=4+3+2+1.



Repare-se ainda que 10 é igual a metade do produto de 4 por 5, 10=(4*5)/2.

Na figura 5, há 5 + (4 + 3 + 2 + 1) = 5 + 10 = 15 telhas.

Também se pode constatar que 15 = (5 * 6)/2.

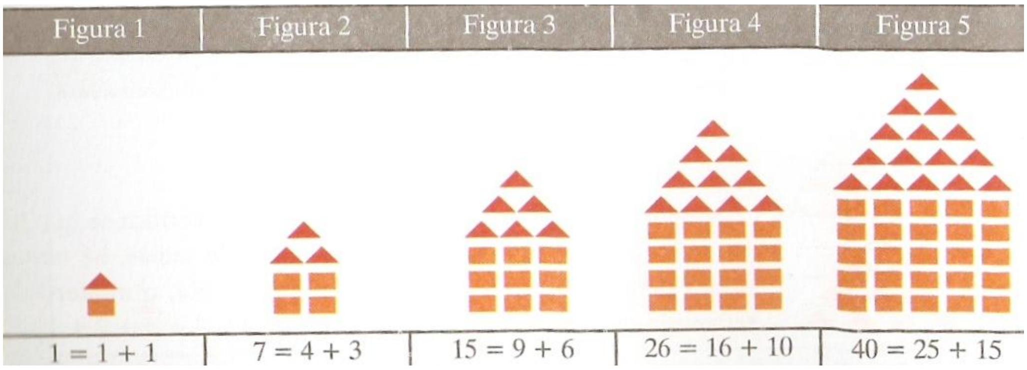
Como, na figura 3, há nove tijolos, deverão estar dispostos em três filas de três tijolos cada: $3 * 3 = 3^2$ tijolos. Assim, e seguindo a mesma regra, na primeira fila de telhas haverá três telhas. Na segunda fila, haverá 3 – 1 = 2 telhas e na terceira fila haverá 2 – 1 = 1 telha, num total de 6 = 3 + (2 + 1) telhas. Também se pode constatar que 6 = (3 * 4)/2.

No total, haverá 12 peças.

Na figura 5 deverá, então, haver $5 * 5 = 5^2$ tijolos e um total de 25 + 15 = 40 peças.

Na figura 2, com um total de sete peças, haverá 2 * 2 = 22 tijolos e 2 + 1 = 3 telhas. Esse número “3” é metade do produto de 2 por 3.

A tabela ficará, então:



Seguindo o mesmo raciocínio, na figura 7 haverá 7 * 7 = 7^2 = 49 tijolos e (7 * 8)/2 = 28 telhas : 7 + (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 7 + 21 = 28 telhas. No total, haverá 49 + 28 = 77 peças.

Na figura 20, haverá 20 * 20 = 20^2 = 400 tijolos e (20 * 21)/2 = 210 telhas, num total de 610 peças.

Na figura n, haverá n * n = n2 tijolos e n * (n + 1)/2 telhas.

Os dados podem ser organizados como a tabela seguinte:

N.º da figura	Número de tijolos	Número de telhas	Total de peças	Total de peças
1	$1 \times 1 = 1^2$	$1 = 1$		$1 + 1 = 2$
2	$2 \times 2 = 2^2$	$2 + 1 = 3$	$(2 \times 3) : 2$	$4 + 3 = 7$
3	$3 \times 3 = 3^2$	$3 + (2 + 1) = 3 + 3 = 6$	$(3 \times 4) : 2$	$9 + 6 = 15$
4	$4 \times 4 = 4^2$	$4 + (3 + 2 + 1) = 4 + 6 = 10$	$(4 \times 5) : 2$	$16 + 10 = 26$
5	$5 \times 5 = 5^2$	$5 + (4 + 3 + 2 + 1) = 5 + 10 = 15$	$(5 \times 6) : 2$	$25 + 15 = 40$
...				
7	$7 \times 7 = 7^2$	$7 + (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 7 + 21 = 28$	$(7 \times 8) : 2$	$49 + 28 = 77$
...				
20	$20 \times 20 = 20^2$	$20 + (19 + 18 + \ldots + 2 + 1)$	$(20 \times 21) : 2 = 210$	$400 + 210 = 610$
...				
n	$n \times n = n^2$	$n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 3 + 2 + 1$	$n(n + 1) : 2$	$n^2 + n(n + 1) : 2$

Um exemplo de uma tarefa que pode ser realizada a partir do 6 º ano de escolaridade.

Material: Calculadora

Tópicos matemáticos envolvidos:

- Relações numéricas;
- Múltiplos de um número natural;
- Potência de um número natural.

Desenvolvimento e possíveis resoluções:

Os alunos devem organizar-se em grupos.

Inicialmente, devem começar a experimentar com alguns casos particulares para potências de base 2 para que, a partir daí, possam detetar a existência de repetições no algarismo das unidades dos números que vao surgindo.

Potência	Número	Algarismo das unidades
2^1	2	2
2^2	4	4
2^3	8	8
2^4	16	6
2^5	32	2
2^6	64	4
2^7	128	8
2^8	256	6
2^9	512	2

Observando os valores da terceira coluna da tabela, constata-se que o algarismo das unidades das potências de base 2 se repete de quatro em quatro. Por isso, o algarismo das unidades de 2^{2008} é 2 ou 4 ou 8 ou 6. Qual deles será?

As potências com expoentes múltiplos de 4 (4,8,12,…) têm algarismo das unidades 6.

As potências com expoentes múltiplos de 4 mais 1 (1,5,9,…) têm algarismo das unidades 2.

As potências com expoentes múltiplos de 4 mais 2 (2,6,10,…) têm algarismo das unidades 4.

As potências com expoentes múltiplos de 4 mais 3 (3, 7, 11,…) têm algarismo das unidades 8.

Ora, 2008 é um múltiplo de 4. Logo, 2^{2008} tem algarismo das unidades 6.

Vamos investigar o algarismo das unidades para bases que variam de 3 a 10.

Base 3:

Potência	Número	Algarismo das unidades
3^1	3	3
3^2	9	9
3^3	27	7
3^4	81	1
3^5	243	3
3^6	729	9
3^7	2187	7
3^8	6561	1
3^9	19 683	3

Observando os valores da terceira coluna da tabela, constata-se que o algarismo das unidades das potências de base 3 se repete de quatro em quatro. Por isso, o algarismo das unidades de 3^{2008} é 3 ou 9 ou 7 ou 1. Qual deles será?

As potências com expoentes múltiplos de 4 (4, 8, 12,…) têm algarismo das unidades 1.

As potências com expoentes múltiplos de 4 mais 1 (1, 5, 9, …) têm algarismo das unidades 3.

As potências com expoentes múltiplos de 4 mais 2 (2, 6, 10,…) têm algarismo das unidades 9.

As potências com expoentes múltiplos de 4 mais 3 (3, 7, 11, …) têm algarismo das unidades 7.

Ora, 2008 é múltiplo de 4. Logo, 3^{2008} tem algarismo das unidades 1.

Base 4:

Potência	Número	Algarismo das unidades
4^1	4	4
4^2	16	6
4^3	64	4
4^4	256	6
4^5	1024	4
4^6	4096	6

Observando os valores da terceira coluna da tabela, constata-se que o algarismo das unidades das potências de base 4 se repete de dois em dois. Por isso, o algarismo das unidades de 4^{2008} é 4 ou 6. Qual deles será?

Quando o expoente da potência é um número ímpar, o algarismo das unidades é 4; quando o expoente é um número par, o algarismo das unidades é 6.

Como 2008 é um número par, 4^{2008} tem algarismo das unidades 6.

Base 5:

Potência	Número	Algarismo das unidades
5^1	5	5
5^2	25	5
5^3	125	5
5^4	625	5

Observando os valores da terceira coluna da tabela, constata-se que o algarismo das unidades das potências de base cinco é sempre 5. Por isso, o algarismo das unidades de 5^{2008} é 5.

Base 6:

Potência	Número	Algarismo das unidades
6^1	6	6
6^2	36	6
6^3	216	6
6^4	1290	6

Observando os valores da terceira coluna da tabela, constata-se que o algarismo das unidades das potências de base 6 é sempre seis. Por isso, o algarismo das unidades de 6^{2008} é 6.

Base 7:

Potência	Número	Algarismo das unidades
7^1	7	7
7^2	49	9
7^3	343	3
7^4	2401	1
7^5	16 807	7
7^6	117 649	9
7^7	823 543	3
7^8	5 764 801	1
7^9	40 353 607	7

Observando os valores da terceira coluna da tabela, constata-se que o algarismo das unidades das potências de base 7 se repete de quatro em quatro. Por isso, o algarismo das unidades de 7^{2008} é 7 ou 9 ou 3 ou 1. Qual deles será?

As potências com expoentes múltiplos de 4 (4, 8, 12,…) têm algarismo das unidades 1.

As potências com expoentes múltiplos de 4 mais 1 (1, 5, 9, …) têm algarismo das unidades 7.

As potências com expoentes múltiplos de 4 mais 2 (2, 6, 10, …) têm algarismo das unidades 9.

As potências com expoentes múltiplos de 4 mais 3 (3, 7, 11, …) têm algarismo das unidades 3.

Ora, 2008 é um múltiplo de 4. Logo 7^{2008} tem algarismo das unidades 1.

Base 8:

Potência	Número	Algarismo das unidades
8^1	8	8
8^2	64	4
8^3	512	2
8^4	4096	6
8^5	32 768	8
8^6	262 144	4
8^7	2 097 152	2
8^8	16 777 216	6
8^9	134 217 728	8

Observando os valores da terceira coluna da tabela, constata-se que o algarismo das unidades das potências de base 7 se repete de quatro em quatro. Por isso, o algarismo das unidades de 8^{2008} é 8 ou 4 ou 2 ou 6. Qual deles será?

As potências com expoentes múltiplos de 4 (4, 8, 12, …) têm algarismo das unidades 6.

As potências com expoentes múltiplos de 4 mais 1 (1, 5, 9, …) têm algarismo das unidades 8.

As potências com expoentes múltiplos de 4 mais 2 (2, 6, 10, …) têm algarismo das unidades 4.

As potências com expoentes múltiplos de 4 mais 3 (3, 7, 11, …) têm algarismo das unidades 2.

Ora, 2008 é um múltiplo de 4. Logo, 8^{2008} tem algarismo das unidades 6.

Base 9:

Potência	Número	Algarismo das unidades
9^1	9	9
9^2	81	1
9^3	729	9
9^4	6561	1
9^5	59 049	9
9^6	531 441	1

Observando os valores da terceira coluna da tabela, constata-se que o algarismo das unidades das potências de base 9 se repete de dois em dois. Por isso, o algarismo das unidades de 9^{2008} é 9 ou 1. Qual deles será?

Quando o expoente da potência é um número ímpar, o algarismo das unidades é 9; quando o expoente é um número par, o algarismo das unidades é 1.

Como 2008 é um número par, 9^{2008} tem algarismo das unidades 1.

Base 10:

Potência	Número	Algarismo das unidades
10^1	10	0
10^2	100	0
10^3	1000	0
10^4	10 000	0

Observando os valores da terceira coluna da tabela, constata-se que o algarismo das unidades das potências de base dez é sempre 0. Por isso, o algarismo das unidades de 10^{2008} é 0.

Sintetizando, para potências de expoente 2008 temos:

Base da potência	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Algarismo das unidades	6	1	6	5	6	1	6	1	0

Variando as bases das potências de 2 a 10, as potências em que as bases são números pares têm algarismo das unidades igual a 6, com excepção das potências de base 10 que têm sempre o algarismo das unidades igual a 0. Quando as bases são números ímpares, o algarismo das unidades é 1, com excepção das potências de base 5 que têm sempre o algarismo das unidades igual a 5.

9. ALGUMAS TAREFAS DO 3º CICLO[6]

Um exemplo de uma tarefa que pode ser realizada a partir do 7ºano de escolaridade.

Observa a seguinte sequência: 2, 6, 12, 20,....

1. Descobre o sexto termo.
2. Descobre o «n-ésimo» termo. Explica o teu raciocínio.

Material: Papel e lápis

Tópicos matemáticos envolvidos:

- Termos de uma sequência;
- Termo geral;
- Expressões numéricas;
- Representação;
- Potências;
- Variável;
- Expressões algébricas;
- Operações com polinómios;
- Expressões equivalentes.

Desenvolvimento e possíveis resoluções:

Os alunos devem organizar-se em pequenos grupos de três, quatro alunos.

Para calcularem o sexto termo, os alunos podem relacionar cada termo com o termo anterior, ou seja, trabalhar recursivamente. No entanto, esta estratégia não se revela eficaz para a generalização distante. Assim, deverão procurar relações entre a ordem e o termo. Para isso, poderão decompor o termo em parcelas ou em factores, para o que será muito útil a elaboração de uma tabela para registo e organização de dados.

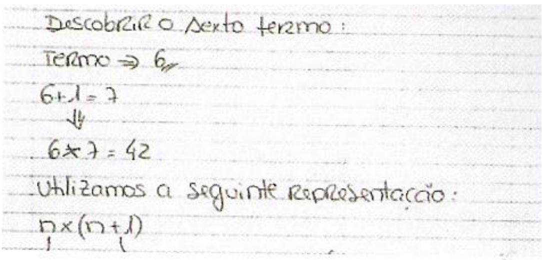
[6] Retirado do livro "Padrões em Matemática: Uma proposta didáctica no âmbito do novo programa para o Ensino Básico"

Este procedimento foi assumido por vários grupos de alunos de 8ºano de escolaridade com quem se trabalhou a tarefa “a sexta de uma cadeia de nove tarefas”.

Algumas das decomposições efectuadas pelos alunos na procura de relações estão ilustradas na tabela junta.

Número de ordem	Termo			
1	2	1×2	$1\times1+1$	$1+1$
2	6	2×3	$2\times2+2$	$4+2$
3	12	3×4	$3\times3+3$	$9+3$
4	20	4×5	$4\times4+4$	$16+4$
5	30	5×6	$5\times5+5$	$25+5$
6	42	6×7	$6\times6+6$	$36+6$
7	56	7×8	$7\times7+7$	$49+7$
8	72	8×9	$8\times8+8$	$64+8$
…	…	…	…	…
n		$n\times(n+1)$	$n\times n+n$	n^2+n

A seguir, apresenta-se a resposta de um grupo que, além de dar resposta à primeira alínea, conduziu à primeira generalização apresentada.


Descobrir o sexto termo:
Termo ⇒ 6
$6+1=7$
⇓
$6\times7=42$
Utilizamos a seguinte representação:
$n\times(n+1)$

Os alunos conseguiram, facilmente, continuar a sequência, mas sentiram maiores dificuldades em encontrar o “n-ésimo” termo. Tal facto é consequência da falta de organização dos dados e, essencialmente, da falta de um suporte visual, ou seja, de uma imagem. De notar que, para esta turma, esta foi a primeira abordagem a este tipo de tarefa, não tendo sido efectuado um trabalho prévio com contagens visuais.

10. Padrões e Regularidades[7]

A importância dos padrões na Matemática tem sido salientada por vários autores. Zazkis e Liljedahl (2002) mencionam mesmo que "os padrões são o coração e a alma da matemática" (p. 379). O estudo de padrões e regularidades tem vindo a ser defendido como um aspecto relevante para o ensino da Álgebra (NCTM, 1991). Neste documento, o NCTM refere que o desenvolvimento de competências com padrões é relevante para a capacidade de:

(i) resolver de problemas;
(ii) compreender conceitos e relações importantes;
(iii) investigar relações entre quantidades (variáveis) num padrão;
(iv) generalizar padrões através do uso de palavras ou variáveis;
(v) continuar e relacionar padrões;
(vi) compreender o conceito de função.

Segundo Ponte (2005), o estudo de padrões e regularidades pode constituir um meio privilegiado para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico. Para este autor, a procura de padrões e regularidades e a formulação de generalizações em diversas situações devem fomentar-se desde os primeiros anos do ensino básico. Os alunos devem então, desde cedo, desenvolver a capacidade de identificar e descrever regularidades e padrões, bem como, de continuar um determinado padrão ou de criar novos padrões. E, ao longo de toda a escolaridade, o estudo de padrões pode assumir diferentes níveis.

Zazkis e Liljedahl (2002) identificam diferentes tipos de padrões: padrões numéricos; padrões geométrico; padrões em procedimentos computacionais; padrões lineares e quadráticos e padrões repetidos. No presente trabalho é dada especial atenção ao estudo de padrões repetidos e de padrões lineares.

Segundo Threlfall (1999) um padrão repetido é um padrão em que há uma unidade visível que se repete ciclicamente. Dado um padrão repetido com uma unidade que se repete de comprimento *n*, a determinação do elemento seguinte pode ser realizada de duas maneiras:

[7] Retirado do livro "Padrões em Matemática: Uma proposta didáctica no âmbito do novo programa para o Ensino Básico"

(i) há uma igualdade entre cada elemento do padrão e um dos primeiros *n* elementos;

(ii) há uma igualdade entre cada elemento do padrão e o elemento n posições antes dele (Liljedahl, 2004).

Ao analisar padrões repetidos os alunos têm oportunidade de continuar a representação do padrão, de procurar regularidades e estabelecer generalizações. A compreensão da unidade que se repete pode não ser facilmente conseguida nos primeiros anos do ensino básico, no entanto, é possível desenvolvê-la mais tarde. A percepção da unidade que se repete permite que os alunos determinem a posição de diversos elementos do padrão, através da generalização. Além disso, Threlfall (1999) defende que o uso de padrões repetidos constitui um veículo para o trabalho com símbolos, um caminho conceptual para a Álgebra e um contexto para a generalização.

Nos padrões designados lineares o elemento *n* pode ser expresso na forma $an+b$. Stacey (1989) deu especial atenção à exploração de padrões lineares, considerando-os desafiantes para alunos entre os 8 e os 13 anos de idade. Esta autora identificou quatro métodos de generalização utilizados pelos alunos:

(i) o método de contagem;

(ii) o método da diferença;

(iii) o método inteiro do objecto;

(iv) o método linear.

O método de contagem envolve a simples continuação do padrão e a contagem até ao elemento desejado. No método da diferença os alunos determinam a diferença entre dois elementos consecutivos e, assim, encontram o elemento *n* de um padrão com base no elemento *n-1*. No entanto, ao tentarem generalizar, um número significativo de alunos usou, erradamente, uma proporção. Por exemplo, no caso da diferença ser de 3, a fórmula geral para a determinação do elemento da posição *n* sugerida foi *3n*. O método inteiro do objecto supõe, uma vez mais de forma errada, que, por exemplo, o elemento que ocupa a posição 36 pode ser determinado através da multiplicação de 9 pelo elemento que ocupa a posição 4. Ou seja, o aluno considera um elemento e, usando os seus múltiplos, determina outros elementos superiores. No método linear os alunos constroem uma regra baseada nas relações que são determinadas pela situação problema. Os alunos envolvidos neste estudo estabeleciam generalizações rapidamente mas em muitas situações não tinham consciência da correspondência inadequada entre sua generalização e as condições do problema. A utilização deste método revela o reconhecimento da necessidade envolver a multiplicação e a adição. A fórmula geral é $an + b$.

Bishop, em 1995, reconhece que é necessária mais informação acerca da forma como os alunos pensam sobre padrões. O autor investiga estratégias usadas pelos alunos em problemas de sequências de perímetros e de áreas de figuras. O estudo foi realizado com alunos dos 7.º e 8.º anos dos Estados Unidos da América. Os resultados obtidos sugerem quatro tipos de pensamento envolvidos na análise dos padrões matemáticos deste estudo:

(i) modelo e contagem;
(ii) relações entre operações únicas;
(iii) figuras consecutivas;
(iv) expressões simbólicas apropriadas.

Os alunos que se situam no primeiro grupo, representam as figuras do padrão e contam por forma a encontrar a área ou o perímetro de cada uma das figuras. Quando lhes é pedido que generalizem o método para determinar o perímetro ou a área dão indicações verbais para a contagem do número de lados da figura. No segundo caso, os alunos percebem que existe uma relação entre o número da figura e o seu perímetro ou área, no entanto, não a compreendem inteiramente, expressando-a apenas com uma única operação. Os alunos que constituem o terceiro grupo estabelecem relações entre o perímetro ou a área de figuras consecutivas. Apesar desta estratégia funcionar para números pequenos, não generaliza toda a situação. Os alunos do último grupo reconhecem as relações entre os números de uma figura e o seu perímetro ou área e expressam essa relação simbolicamente. Este estudo sugere, ainda, que a realização de tarefas envolvendo padrões promove nos alunos a capacidade de pensar sobre relações matemáticas e de expressá-las simbolicamente. Segundo o autor, deve ser dada especial atenção à identificação e representação de relações entre as componentes de um padrão, uma vez que os alunos que não conseguem desenvolver expressões simbólicas têm dificuldades em usar equações para responder a questões sobre padrões.

Também, English e Warren (1999) realizaram uma investigação usando padrões lineares. No seu estudo participaram 430 alunos, da Austrália, com idades compreendidas entre os 12 e 15 anos. Estas autoras defendem uma abordagem com padrões para a introdução da noção de variável. Este tipo de abordagem permite que os alunos observem e verbalizem as suas generalizações e as registem de uma forma simbólica. Sugerem, ainda, que a actividade com padrões não termine com a abordagem ao conceito de variável mas que proporcione uma oportunidade de trabalhar com os símbolos, nomeadamente através da simplificação algébrica e da análise de expressões equivalentes. Neste estudo verifica-se que os alunos têm mais facilidade em verbalizar as suas generalizações do que escrevê-las simbolicamente. No entanto, a capacidade de compreender uma relação e, de seguida, formulá-la através de uma expressão algébrica é essencial para o estudo da Álgebra (MacGregor e Stacey, 1993).

O estudo elaborado por Herbert e Brown (1999) relata uma experiência com alunos do 6.º ano, nos Estados Unidos da América, cuja tarefa realizada apresenta um carácter exploratório. Usando um processo investigativo para resolver problemas contextualizados e procurando generalizar as regularidades verificadas, os alunos, têm oportunidade de mobilizar e desenvolver diversos aspectos do pensamento algébrico. Nesta investigação, os alunos demonstram-se empenhados encontrar estratégias que permitam resolver o problema em questão:

(i) procuram uma regularidade na história;
(ii) reconhecem o padrão e descrevem-no usando diferentes métodos;
(iii) generalizam o padrão e relacionam-no com a história.

O pensamento algébrico envolvido apela ao uso de símbolos e ferramentas matemáticas para,

(i) extrair informação de uma situação concreta;
(ii) representar essa informação matematicamente em palavras, diagramas, tabelas, gráficos e equações;
(iii) interpretar e aplicar conhecimentos matemáticos, tais como a determinação de incógnitas, o teste de conjecturas e a identificação de relações, para a uma mesma situação e para uma nova.

A capacidade dos alunos em adoptar um processo investigativo é evidente nas estratégias de exploração de regularidades que exibem; nas ferramentas utilizadas para descrever essas regularidades, tais como tabelas, gráficos e regras verbais; nas generalizações que estabelecem.

11. Conclusão

Após a elaboração deste trabalho cheguei à conclusão que realmente a celebre frase "A matemática é uma ciência de padrões" é mesmo a correcta pois por vezes ao estudarmos ou falarmos de uma certa matéria não se tem a noção que os padrões aparecem mesmo em tudo. Por vezes estava a usar padrões sem me aperceber que os estaria a usar.

Antes para mim quando se falava de padrões parecia-me um assunto estranho, associava padrões a imagens e cores, um tecido, uma parede, azulejos, etc.

Assim, fiquei que os matemáticos procuram regularidades nos números, no espaço, na ciência e na imaginação e formularam teorias com as quais tentam explicar relações observadas, algumas delas que dá para verificar nas tarefas acima transcritas.

12. Bibliografia/Webgrafia

Para a realização deste trabalho efectuei pesquisa nos sites:

- www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/data/.../comp_matematica02.pdf ;
- http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf .

E no livro:

- Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L. & Pimentel, T. (2011). Padrões em Matemática: Uma proposta didáctica no âmbito do novo programa para o Ensino Básico