



FCTUC FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Departamento de Matemática

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho 4: Os Sólidos Geométricos



Meios Computacionais no Ensino

Professor: Jaime Carvalho e Silva

Trabalho elaborado por:
Tânia Isabel Duarte Lopes



FCTUC FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Departamento de Matemática

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho 4: Os Sólidos Geométricos

Professor: Jaime Carvalho e Silva

Trabalho elaborado por:
Tânia Isabel Duarte Lopes



Conteúdo

1.	INTRODUÇÃO	4
2.	SÓLIDOS GEOMÉTRICOS	5
2.1.	Definição de sólido geométrico	5
2.2.	Sólidos Poliedros e não poliedros	5
2.3.	Sólidos Platónicos	6
2.4.	Sólidos Arquimedianos	11
2.5.	Sólidos de Johnson	23
2.6.	Sólidos de Kepler-Poinsot	23
2.7.	Prismas e Anti Prismas	23
2.8.	Pirâmides e Bpirâmides	25
2.9.	Sólidos de Catalán	25
2.10.	Deltaedros	25
2.11.	Trapezoedros	26
3.	CONCLUSÃO	26
4.	BIBLIOGRAFIA	27



1. INTRODUÇÃO

Este trabalho, no âmbito da cadeira Meios Computacionais no Ensino, foi-nos proposto escolher um tema que existisse na “Casa das Ciências”.

O trabalho deverá ser enviado para o professor Jaime Carvalho e Silva pelo moodle, o moodle at hilbert.mat.uc.pt, ou seja, o moodle do servidor do departamento, para usarmos mais uma ferramenta muito útil no ensino como forma de interacção entre o professor e o aluno nomeadamente para a colocação de material por parte do professor. É muito útil este uso pois assim quem não sabe usar esta plataforma aprende e quem já sabia algo aprofunda as suas competências.

Eu confesso que só soube da existência desta plataforma nas aulas de Meios Computacionais no Ensino, no entanto, no moodle Mocho, uma outra plataforma semelhante a esta, já tinha trabalhado um pouco tanto ao nível de aluna como ao nível de professora ou gerente da conta.

Pretende-se ainda que todas as imagens que ilustrem este trabalho sejam criadas no software Cinderella ou no software Poly.

O software Cinderella é um programa de Geometria Dinâmica da autoria de J. Richter-Gebert e U. H. Kortenkamp. Como o programa é destinado a fazer geometria no computador, o Cinderella constitui um utensílio para investigar construções geométricas de grande qualidade. O utilizador só tem de manejar o rato para interagir com o programa, que apresenta o seguinte aspecto nos primeiros momentos de utilização.

Já o software Poly, é um aplicativo para Geometria Espacial, faz planificações e animações. Muito interessante para aplicar com Poliedros (Platónicos ou Arquimedianos, entre outros sólidos). Proporciona a possibilidade de acção com quadro digital interativo.

Decidi tratar de sólidos geométricos, logo o software destinado para ilustrar o meu trabalho será o Poly.



2. SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

2.1. *Definição de sólido geométrico*

Os sólidos geométricos são volumes que têm na sua constituição figuras geométricas e podem ser poliedros, se só tiverem superfícies planas, ou não poliedros, se tiverem superfícies planas e curvas.

Se pensarmos bem no nosso dia-a-dia encontramos uma bola (que tem o aspeto de uma esfera), um dado (que tem o aspeto de um cubo), uma lata de refrigerante (que tem o aspeto de um cilindro), um chapéu de bruxa (que tem o aspeto de cone), o autocarro (que tem o aspeto de um paralelepípedo), entre outros.

Existe sólidos regulares e sólidos não regulares. Os sólidos regulares são: os sólidos platónicos e os sólidos de Kepler-Poinsot, já os sólidos não regulares são os sólidos de Arquimedes, os prismas e anti prismas, as pirâmides e bipirâmides, os sólidos de catalán, os deltaedros e os trapezoedros.

Mais à frente falarei um pouco de cada um dos tipos de sólidos.

2.2. *Sólidos Poliedros e não poliedros*

A palavra “Poliedros” vem de poli + hedros, em que poli significa muitos e hedros significa faces.

Os sólidos poliedros são sólidos delimitados por regiões planas (polígonos) que constituem as denominadas faces. Os segmentos de recta que limitam as faces designam-se por arestas e pontos de encontro destas por vértices.

Todos os poliedros vão ter faces, vértices e arestas. As faces são os polígonos que limitam o poliedro; os vértices são os pontos de interseção de três ou mais arestas; e, por último, as arestas são segmentos de reta que limitam as suas faces.

Os poliedros podem ser de dois tipos: convexos ou não convexos. Um poliedro diz-se convexo quando um poliedro está situado apenas num semi-espaco, em relação a qualquer uma das suas faces.

A relação de Euler é válida para todos os poliedros:

$$F + V = A + 2$$



Os poliedros têm certas nomenclaturas de acordo com o número de faces que cada um têm, por exemplo, com quatro faces diz-se tetraedro, com cinco faces diz-se pentaedro, com seis faces diz-se hexaedro, com sete faces diz-se heptaedro, com oito faces diz-se octaedro, com dez faces diz-se decaedro, com doze faces diz-se dodecaedro e com vinte faces diz-se icosaedro.

Os sólidos não poliedros tal como o nome nos diz são os sólidos que não são poliedros.

Alguns exemplos de sólidos poliedros são os sólidos platónicos e não poliedros são: a esfera, o cone, o elipsóide, o cilindro e o toro.

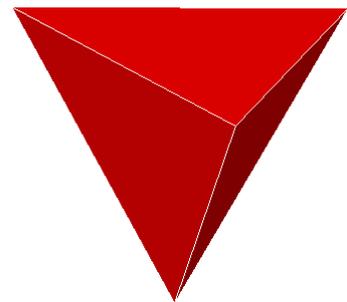
2.3.Sólidos Platónicos

Os sólidos Platónicos são poliedros onde todas as faces são polígonos regulares geometricamente iguais e em que cada vértice se encontra o mesmo número de arestas.

Os sólidos platónicos são apenas cinco: o tetraedro, o cubo, o octaedro, dodecaedro e o icosaedro.

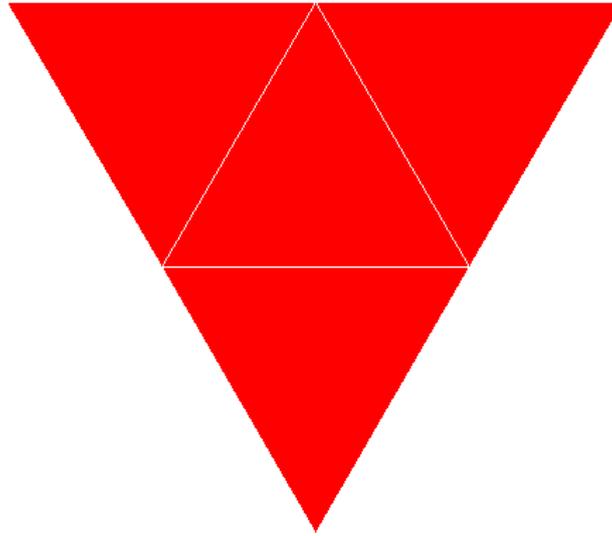
2.3.1. Tetraedro

O tetraedro é um poliedro composto por quatro faces triangulares, três delas encontrando-se em cada vértice. O tetraedro regular é um sólido platónico, figura geométrica espacial formada por quatro triângulos equiláteros (triângulos que possuem lados com medidas iguais); possui quatro vértices, quatro faces e seis arestas.



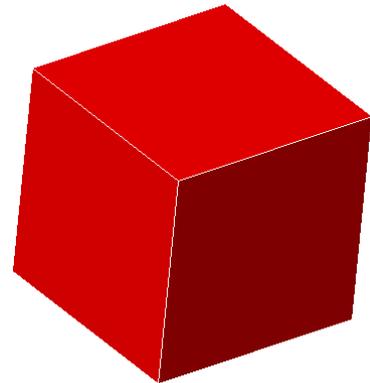
O poliedro dual de um tetraedro é um outro tetraedro.

A sua planificação é a seguinte,



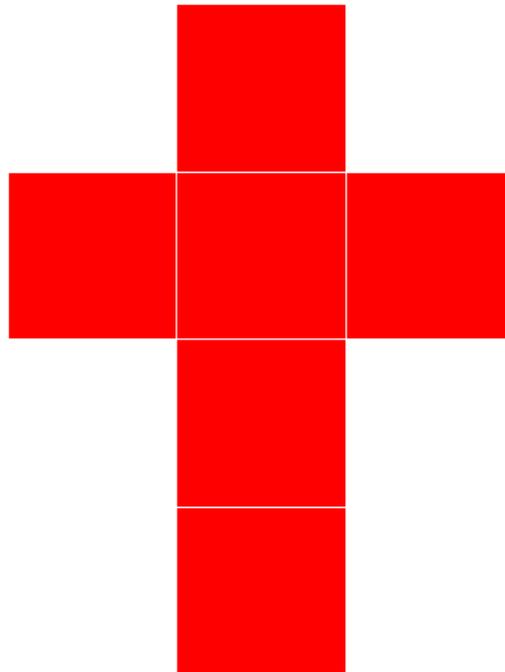
2.3.2. Cubo

O cubo é um hexaedro pois é composto por seis faces quadrangulares, três delas encontrando-se em cada vértice. O cubo é um sólido platónico, figura geométrica espacial formada por seis quadrados (como se sabe, os quadrados têm todos lados com medidas iguais e ângulos de 90°); possui oito vértices, seis faces e doze arestas.



O poliedro dual de um cubo é um octaedro.

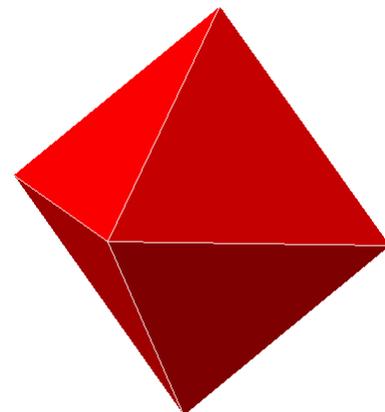
A sua planificação é a seguinte,



Por curiosidade, a planificação do cubo acima não é única pois existe onze planificações do cubo diferentes, a planificação acima é a mais usual.

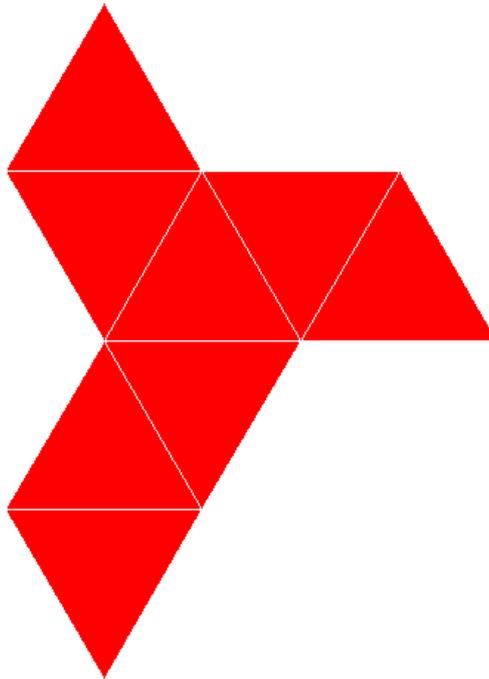
2.3.3. Octaedro

O octaedro é um poliedro composto oito faces triangulares, quatro delas encontrando-se em cada vértice. O octaedro é um sólido platónico, figura geométrica espacial formada por oito triângulos equiláteros (triângulos que possuem lados com medidas iguais); possui seis vértices, oito faces e doze arestas.



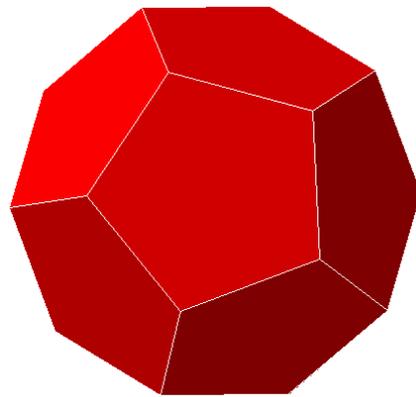
O poliedro dual de um octaedro é um cubo.

A sua planificação é a seguinte,



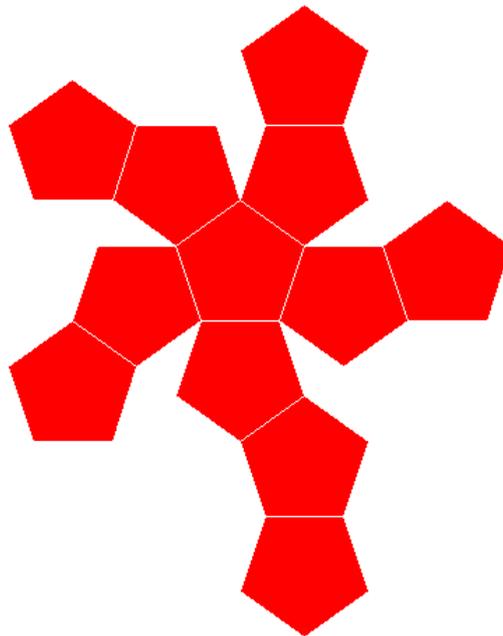
2.3.4. Dodecaedro

O dodecaedro é um poliedro composto doze faces pentagonais, três delas encontrando-se em cada vértice. O dodecaedro é um sólido platónico, figura geométrica espacial formada por doze pentágonos regulares (triângulos que possuem lados com medidas iguais); possui vinte vértices, doze faces e trinta arestas.



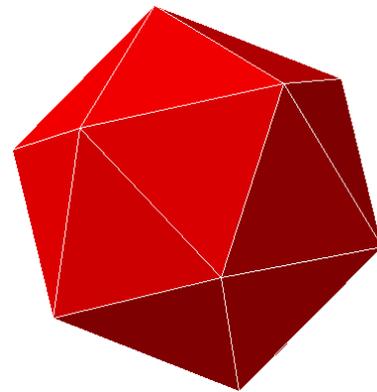
O poliedro dual de um dodecaedro é um icosaedro.

A sua planificação é a seguinte,



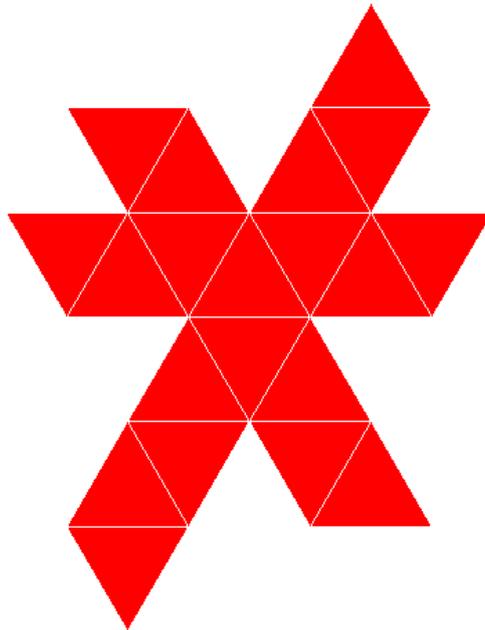
2.3.5. Icosaedro

O icosaedro é um poliedro composto vinte faces triangulares, cinco delas encontrando-se em cada vértice. O icosaedro é um sólido platónico, figura geométrica espacial formada por vinte triângulos equiláteros (triângulos que possuem lados com medidas iguais); possui doze vértices, vinte faces e trinta arestas.



O poliedro dual de um icosaedro é um dodecaedro.

A sua planificação é a seguinte,



2.3.6. Curiosidades dos Sólidos Platónicos

Segundo a teoria grega relacionada com os quatro elementos, cada um dos elementos estava associado a um sólido, a terra estava associada com o cubo, o fogo com o tetraedro, a água com o icosaedro e o ar com o octaedro. Como se pode reparar o dodecaedro ficava de fora pois era considerado o mais misterioso dos sólidos e o mais difícil de construir. Segundo dizem, Platão achava que Deus teria usado o dodecaedro para construir o Universo.

2.4. Sólidos Arquimedianos

Os sólidos Arquimedianos são os sólidos de Arquimedes ou também conhecidos por poliedros semi-regulares. Estes são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo. Todos os seus vértices são congruentes, isto é, existe o mesmo arranjo de polígonos em torno de cada vértice. Além disso, todo vértice pode ser transformado num outro vértice por uma simetria do poliedro.

Existem apenas treze poliedros arquimedianos e são todos obtidos por operações sobre os sólidos platónicos. Esses sólidos são onze obtidos por truncação de sólidos platónicos: o tetraedro truncado, o cuboctaedro, o cubo truncado, o octaedro truncado, o rombicuboctaedro, o cuboctaedro truncado, o icosidodecaedro, o dodecaedro



truncado, o icosaedro truncado, o rombicosidodecaedro e o icosidodecaedro truncado; e dois obtidos por snubificação de sólidos platónicos: o cubo snub e o icosidodecaedro snub.

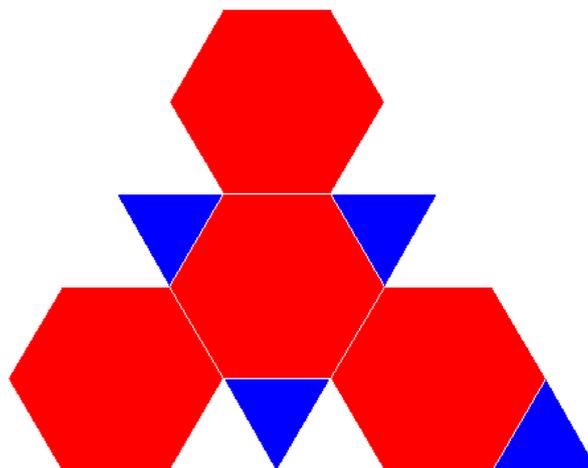
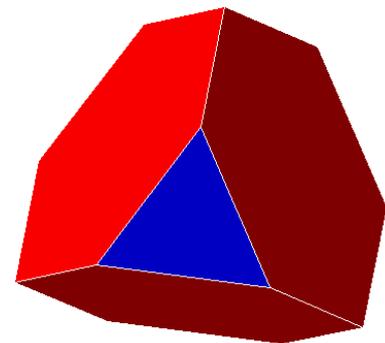
Os sólidos obtidos por snubificação são sólidos cuja sua figura é a mesma correspondente no espelho.

2.4.1. *Tetraedro Truncado*

O tetraedro truncado é um sólido de Arquimedes. Este é obtido por truncatura dos vértices do tetraedro (tetraedro regular, um sólido platónico). Este sólido tem oito faces (quatro hexágonos regulares e quatro triângulos equiláteros), doze vértices e dezoito arestas.

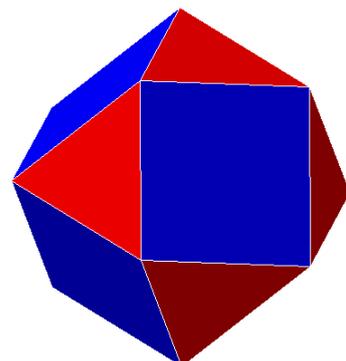
O poliedro dual do tetraedro truncado é o tetraedro triakis.

A sua planificação é a seguinte,



2.4.2. *Cuboctaedro*

Um cuboctaedro é um sólido de Arquimedes, um poliedro com catorze faces (oito triangulares equiláteras e seis quadradas), tem doze vértices idênticos, formados pelo

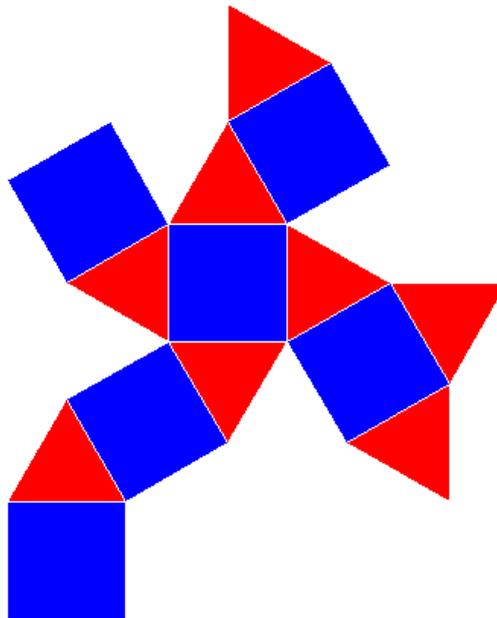




encontro de dois triângulos e dois quadrados, e vinte e quatro arestas idênticas, cada uma separando um triângulo de um quadrado.

O poliedro dual do cuboctaedro é o dodecaedro rombico.

A sua planificação é a seguinte,

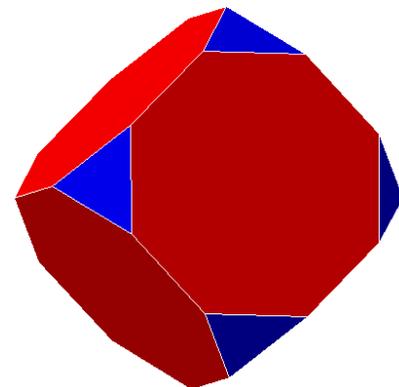


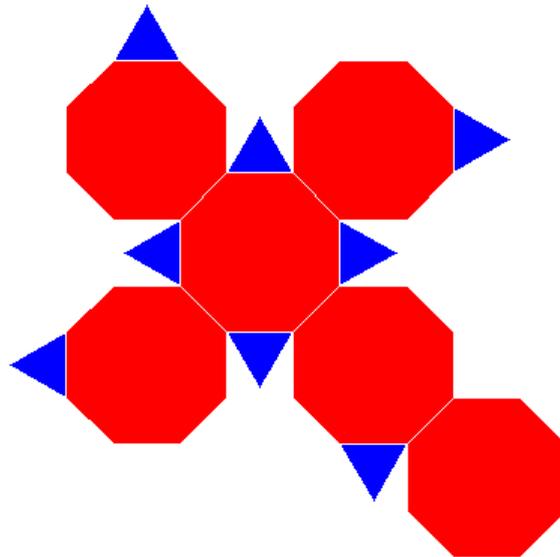
2.4.3. *Cubo Truncado*

O cubo truncado (ou hexaedro truncado) é um sólido de Arquimedes. Este é obtido por truncatura dos vértices de um cubo. O cubo truncado tem doze faces (seis octogonais regulares e oito triangulares regulares), vinte e quatro vértices e trinta e seis arestas.

O poliedro dual do cubo truncado é o octaedro triakis.

A sua planificação é,



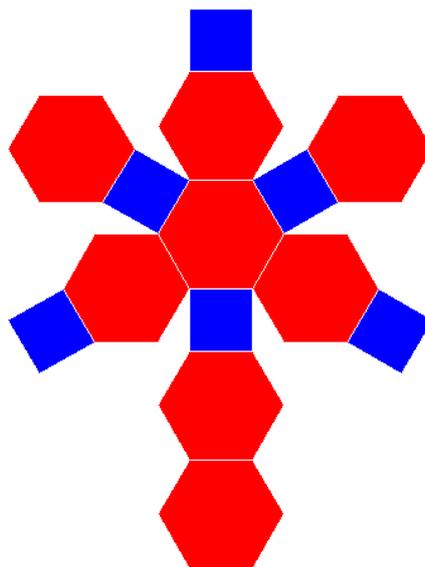
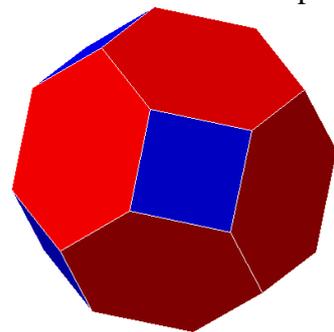


2.4.4. *Octaedro Truncado*

O octaedro truncado é um sólido de Arquimedes. Este sólido é obtido por truncatura sobre os vértices do octaedro (um dos sólidos platónicos). O octaedro truncado tem catorze faces (oito hexagonais e seis quadradas), vinte e quatro vértices e trinta e seis arestas.

O poliedro dual do octaedro truncado é o hexaedro tetrakis.

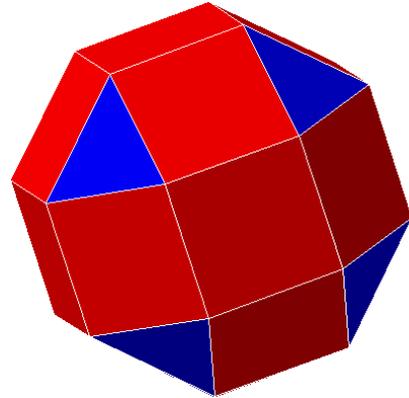
A sua planificação é,





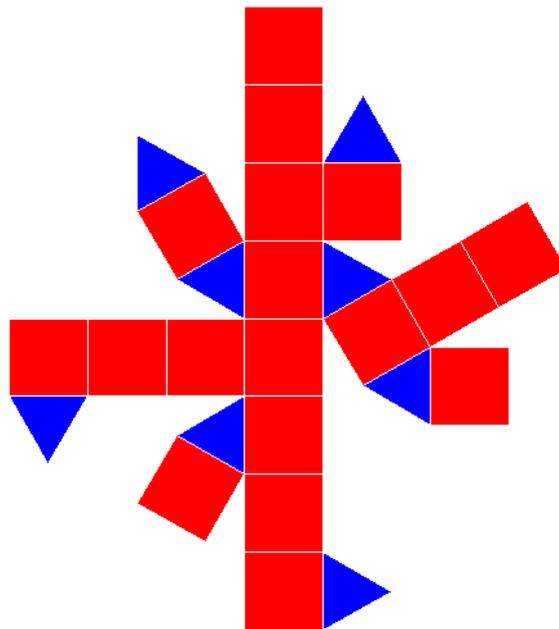
2.4.5. *Rombicuboctaedro*

O rombicuboctaedro, também conhecido como o pequeno rombicuboctaedro é um sólido de Arquimedes. Este sólido obtém-se truncando cada vértice de um cuboctaedro, resultando vinte e seis faces (oito triângulos equiláteros e dezoito quadrados).



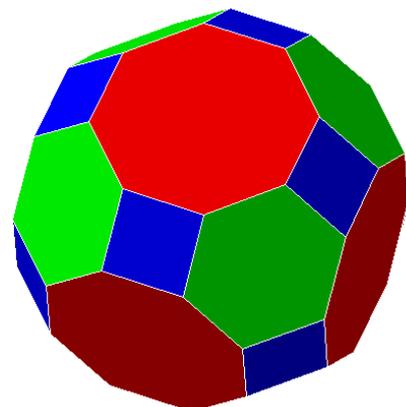
O poliedro dual do rombicuboctaedro é Icositetraedro deltoidal.

A sua planificação é,



2.4.6. *Cuboctaedro truncado*

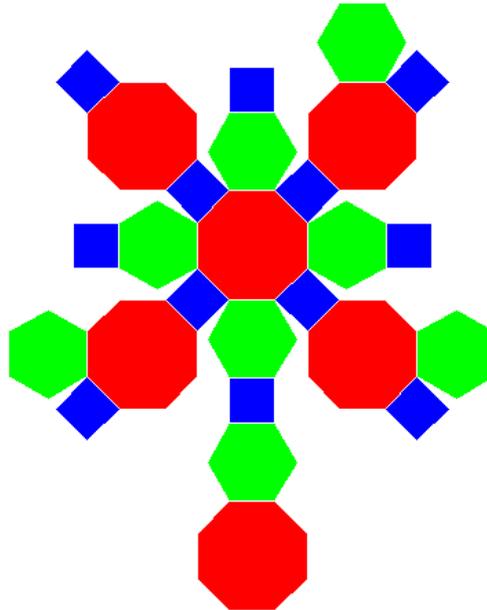
O cuboctaedro truncado, também conhecido por grande rombicuboctaedro é um sólido de Arquimedes. Este sólido tem vinte e seis faces regulares (doze quadrado, oito hexágonos e seis octógonos), quarenta e oito vértices e setenta e duas arestas.





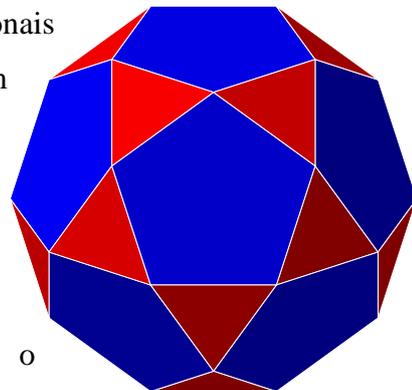
O poliedro dual do cuboctaedro truncado é dodecaedro disdiakis.

A sua planificação é,



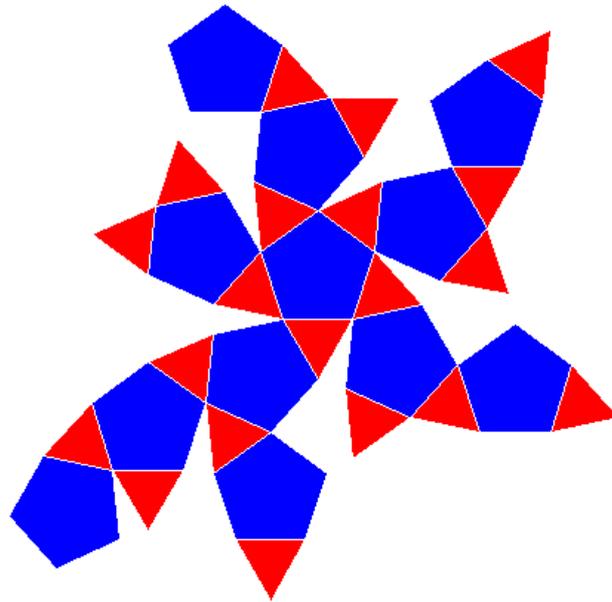
2.4.7. Icosidodecaedro

O icosidodecaedro é um sólido de Arquimedes. Este sólido tem trinta e duas faces (vinte triangulares regulares e doze pentagonais regulares), trinta vértices idênticos (onde se encontram dois triângulos e dois pentágonos) e sessenta arestas idênticas (cada uma separando um triângulo de um pentágono).



O poliedro dual do icosidodecaedro é o triacontaedro rômbico.

A sua planificação é,

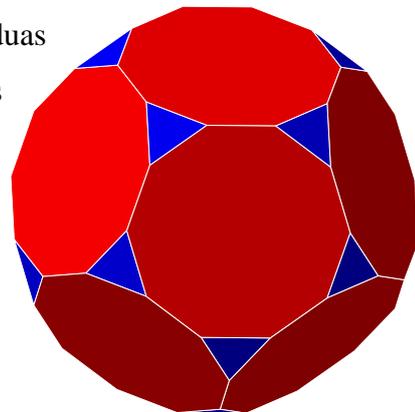


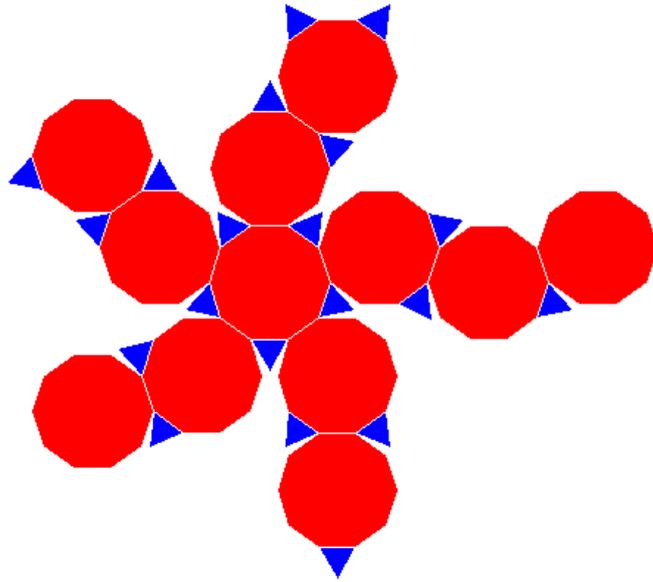
2.4.8. *Dodecaedro Truncado*

O dodecaedro truncado é um sólido de Arquimedes. Este sólido é obtido por truncatura dos vértices do dodecaedro e tem trinta e duas faces (doze decagonais regulares e vinte triangulares regulares), sessenta vértices e noventa arestas.

O poliedro dual do dodecaedro truncado é o icosaedro triakis.

A sua planificação é,

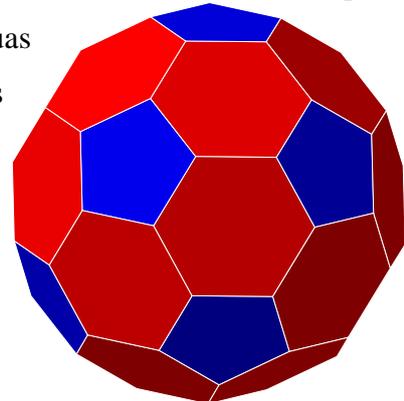




2.4.9. *Icosaedro truncado*

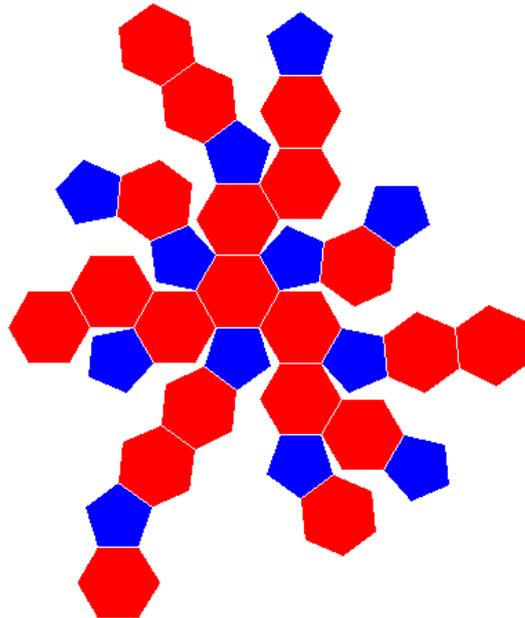
O icosaedro truncado é um sólido de Arquimedes. Este sólido é obtido por truncatura sobre os vértices do icosaedro e tem trinta e duas faces (doze pentagonais regulares e vinte hexagonais regulares), sessenta vértices e noventa arestas.

O poliedro dual do icosaedro truncado é o dodecaedro pentakis.



Existe alguns exemplos bem conhecidos do dia-a-dia com este formato, como por exemplo as bolas de futebol.

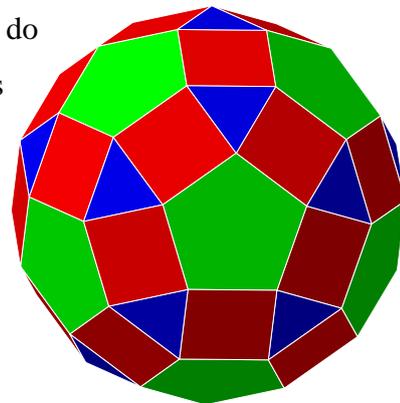
A sua planificação é,



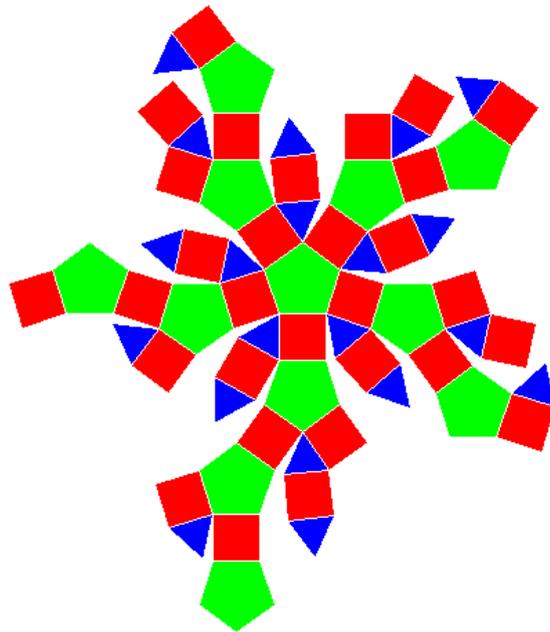
2.4.10. Rombicosidodecaedro

O rombicosidodecaedro é um sólido de Arquimedes. Este sólido é obtido como dual do hexecontaedro deitoidal ou por expansão do octaedro e tem sessenta e duas faces (vinte triangulares regulares, trinta quadradas e doze pentagonais regulares), sessenta vértices e cento e vinte arestas.

Tal como referi atrás, o poliedro dual do rombicosidodecaedro é o hexecontaedro deitoidal.



A sua planificação é,

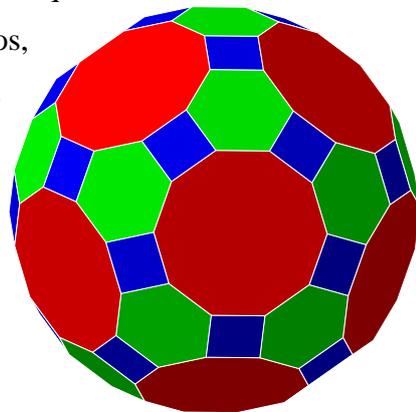


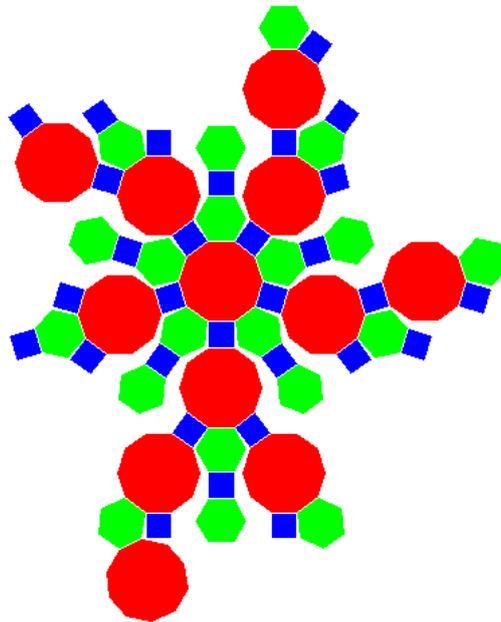
2.4.11. Icosidodecaedro truncado

O icosidodecaedro truncado é um sólido de Arquimedes. Este sólido tem sessenta e duas faces todas regulares (trinta quadrados, vinte hexágonos e doze decágonos), cento e vinte vértices e cento e oitenta arestas.

O poliedro dual do icosidodecaedro truncado é o triacontaedro disdiakis.

A sua planificação é,





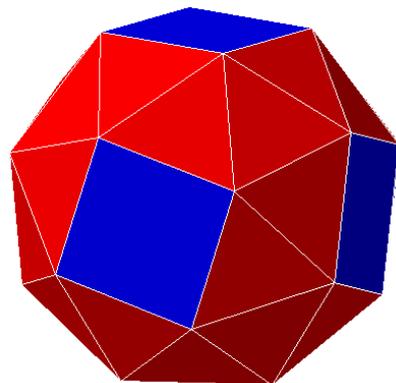
2.4.12. Cubo Snub

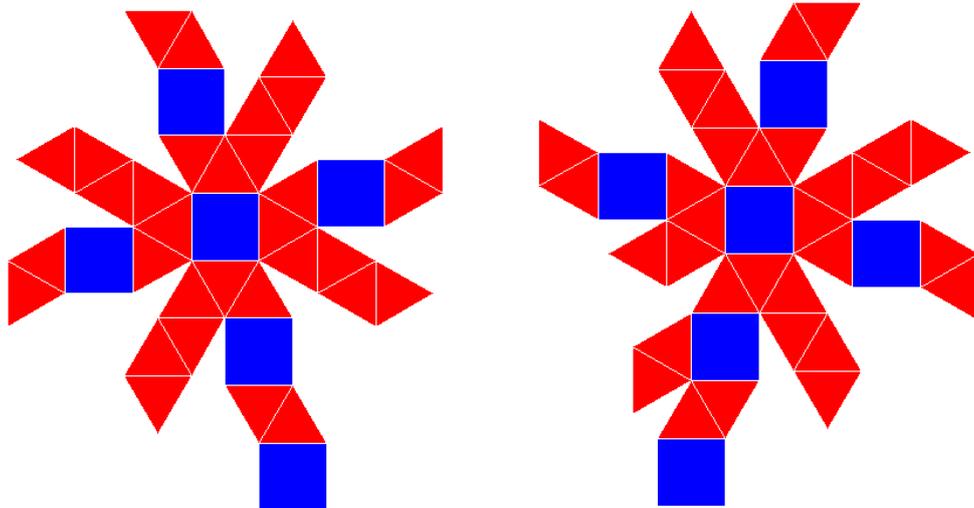
O cubo snub é um sólido de Arquimedes. Este é obtido por snubificação do cubo e tem no total trinta e oito faces (seis quadrados e trinta e dois triângulos equiláteros), vinte e quatro vértices e sessenta arestas.

O poliedro dual do cubo snub é o icositetraedro pentagonal.

Este sólido tem duas planificações possíveis que são espelho uma da outra.

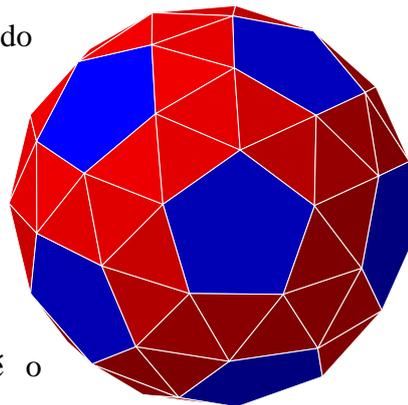
As suas planificações são,





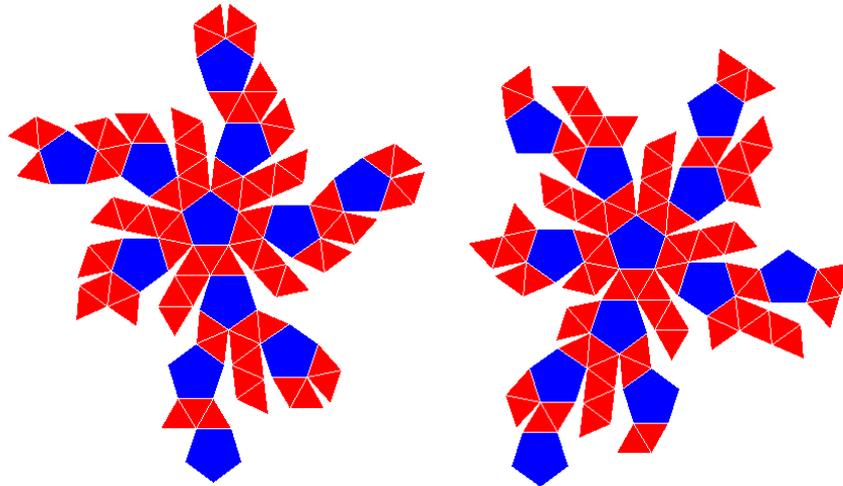
2.4.13. Icosidodecaedro Snub.

O icosidodecaedro snub, também conhecido como dodecaedro snub, é um sólido de Arquimedes. Este sólido é obtido por snubificação do dodecaedro ou do icosidodecaedro e tem no total noventa e duas faces (doze pentágonos regulares e oitenta triângulos equiláteros), sessenta vértices e cento e cinquenta arestas.



O poliedro dual do icosidodecaedro snub é o hexecontaedro pentagonal.

As suas planificações são,



2.5. Sólidos de Johnson

Um sólido de Johnson é um poliedro cujas faces são polígonos regulares e não são sólidos platónicos, nem sólidos arquimedianos, nem prismas e nem anti prismas.

Estes sólidos foram “descobertos e tratados” por Norman Johnson, que fez uma lista com o nome e o número de noventa e dois sólidos em 1966. Johnson tinha ideia que eram apenas noventa e dois sólidos mas nunca conseguiu provar, mais tarde, Victor Zalgaller é que veio a provar, em 1969, que Johnson estava certo.

2.6. Sólidos de Kepler-Poinsot

Os sólidos de Kepler-Poinsot são poliedros regulares e não convexos. Simplesmente existe quatro sólidos deste tipo, que são: o pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro estrelado (descoberto por Joahnnes Kepler, em 1619), o grande dodecaedro e o icosaedro estrelado.

2.7. Prismas e Anti Prismas

Há imensos prismas e anti prismas.

Os prismas são compostos por duas faces paralelas chamadas directrizes ao qual dão o nome de prisma e vários retângulos (tantos como o número de lados da face diretriz).



Alguns exemplos de prismas são: o prisma triangular com cinco faces (dois triângulos e três retângulos), nove arestas e seis vértices de ordem três de onde convergem sempre dois retângulos e um triângulo; o prisma decagonal com doze faces (dois decágonos e dez retângulos), trinta arestas e vinte vértices de ordem três.

Os anti prismas são compostos por duas faces poligonais iguais e paralelas chamadas directrizes, ligados por triângulos.

O número de triângulos é o dobro do número de lados da face directriz, por exemplo, o anti prisma pentagonal é composto por dois pentágonos e dez triângulos, tem dez vértices e vinte arestas.

2.7.1. Tipos de Prismas

Há três tipos de prismas: os prismas retos, os prismas oblíquos e os prismas regulares.

Os prismas retos são prismas que têm as arestas laterais perpendiculares às bases.

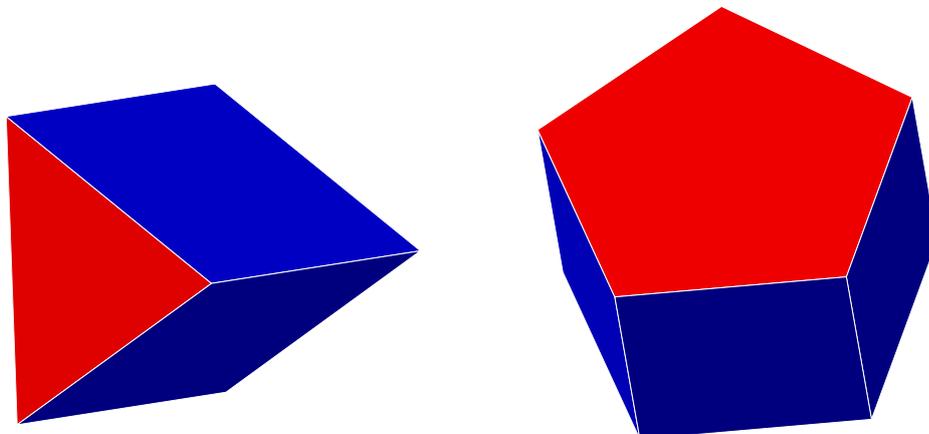
Os prismas oblíquos são prismas em que as arestas laterais não são perpendiculares às bases.

E, por fim, os prismas regulares são os prismas retos em que as bases são dois polígonos regulares.

2.7.2. Alguns exemplos

Depois de saber o que é um prisma facilmente se percebe o que será um prisma triangular. Então um prisma triangular é um prisma em que as suas bases são triângulos.

E um prisma pentagonal é um prisma em que as suas bases são pentágonos, e assim sucessivamente.





2.8. Pirâmides e Bipirâmides

Uma pirâmide que tem como base um polígono de n -lados é um poliedro composto pela ligação de todos os vértices de um lado poligonal (a base) de n -lados com um único ponto, chamado vértice da pirâmide, através de n faces triangulares.

Alguns exemplos de pirâmides são: a pirâmide triangular (um caso particular é o tetraedro quando todos os triângulos são equiláteros) com quatro triângulos, quatro vértices e seis arestas; a pirâmide quadrangular com cinco faces (um quadrado e quatro triângulos), cinco vértices e oito arestas; entre outras.

Uma bipirâmide ou dipirâmide é um poliedro composto pela junção de uma pirâmide e a sua imagem do espelho na base, ou seja, é como se juntasse duas pirâmides de modo a as bases ficarem juntas e como desaparecessem. Um exemplo de uma bipirâmide é o octaedro.

2.9. Sólidos de Catalán

Os sólidos de Catalán são uma família de gerados como os sólidos duais dos sólidos de Arquimedes, logo também serão treze sólidos visto que há treze sólidos de Arquimedes. O seu nome deve-se ao matemático belga Eugène Charles Catalan.

Os treze sólidos de Catalan são: o Tetraedro triakis, o Dodecaedro rômbico, o Octaedro triakis, o Hexaedro tetrakis, o Icositetraedro deltoidal, o Dodecaedro disdiakis, o Icositetraedro pentagonal, o Triacontaedro rômbico, o Icosaedro triakis, o Dodecaedro pentakis, o Hexecontaedro deltoidal, o Triacontaedro disdiakis e o Hexecontaedro pentagonal.

2.10. Deltaedros

Um deltaedro é um poliedro em que todas as faces são triângulos equiláteros e alguns são bem conhecidos. Existe inúmeros deltaedros, no entanto apenas oito são convexos. Esses oito deltaedros convexos são: três dos sólidos platónicos (o tetraedro, o octaedro e o icosaedro) e cinco sólidos de Johnson (a bipirâmide triangular, a bipirâmide pentagonal, a dispenoide snub, o prisma triangular triaumentado e a bipirâmide quadrada giralongada).



2.11. Trapezoedros

Um trapezoedro ou um deltoedro é um poliedro dual de um anti prisma, onde as suas faces são deltóides.

3. CONCLUSÃO

Se olharmos para o programa da matemática do ensino básico pode reparar-se que os sólidos geométricos estão inseridos nos três ciclos.

No 1º ciclo, os alunos tem de agrupar e classificar os sólidos geométricos, de modo a identificar as figuras geométricas que cada sólido tem, as suas semelhanças e diferenças entre os sólidos.

No 1º e 2º ano de escolaridade, os alunos começam por “separar” os sólidos geométricos os que têm todas as superfícies planas (os poliedros) dos que têm superfícies curvas (os não poliedros).

No 3º e 4º ano de escolaridade, os alunos têm de comparar e descrever propriedades de sólidos geométricos e classifica-los, por exemplo, o prisma, o paralelepípedo, o cubo, a pirâmide, a esfera, o cilindro e o cone, e fazê-los investigar principalmente as planificações do cubo e do paralelepípedo.

No 2º ciclo, os alunos aprendem a descrever os sólidos geométricos e a identificar os seus elementos, a relacionar o número de faces, de arestas e de vértices de uma pirâmide e de um prisma de acordo com o polígono da base, identificar e desenhar os sólidos a partir das planificações e vice-versa e aprendem a relação de Euler ($F + V = A + 2$).

No 3º ciclo, os alunos aprofundam o estudo dos sólidos geométricos (os prismas retos e pirâmides regulares, com bases triangulares e quadrangulares, os cones e esferas), aprendem a calcular a área de superfície e o volume de cada sólido geométrico principalmente dos prismas rectos, das pirâmides regulares, dos cones e das esferas; o estudo dos prismas e pirâmides em que as bases são triangulares e quadrangulares; decompor os sólidos e comparar os seus volumes; e, comparar volumes usando modelos de sólidos de enchimento. Os sólidos geométricos também eram usados nos critérios de paralelismo e de perpendicularidade.

Obviamente que, os alunos não ouvem falar dos sólidos todos que enunciei no trabalho, aliás eu própria não conhecia tantos sólidos geométricos, ainda só tinha ouvido



falar dos sólidos “ditos habituais”, dos sólidos platónicos e dos sólidos arquimedianos (este ano na aula de Atividades Matemáticas).

Um material muito bom para a construção dos sólidos geométricos é os polydron's e no programa poly também é possível observar os sólidos como se tivesse as peças do polydron's. Em algumas aulas de Ensino da Matemática, nós alunos de Mestrado, tivemos a construir alguns sólidos platónicos e alguns deltaedros.

4. BIBLIOGRAFIA

Para a elaboração deste trabalho, efetuei pesquisa nos sites:

- http://www.sitiodosmiudos.pt/matematica/default.asp?url_area=E;
- <http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf;>
- http://pt.wikipedia.org/wiki/Wikip%C3%A9dia:P%C3%A1gina_principal;
- <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm205/apressol.htm;>
- [http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm21/frame.htm.](http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm21/frame.htm)