

## Programação Linear



## O Problema da Dieta

André Ferreira

Liliana Pinho

Coimbra, 7 de Dezembro de 2012

## Índice

1.Introdução.....	3
2.Motivação .....	3
3.Modelação.....	4
Tabela Nutricional e de preços.....	6
4. Formulação Matemática.....	8
5. Forma Matricial.....	10
6.Determinação da Solução Ótima.....	10
<b>7.Conclusão .....</b>	<b>11</b>
8.Anexos .....	12
8.1 Programa Cplex .....	12
8.2 Matriz A .....	14

## 1.Introdução

A Programação Linear é um ramo da matemática aplicada que usa modelos matemáticos. Os problemas de programação linear procuram encontrar um objetivo, geralmente o de maximizar lucros ou o de minimizar despesas, tendo em conta os recursos limitados e as necessidades que se devem satisfazer.

Para resolver um problema linear temos que resolver a função denominada função objetivo, mas como restrições do modelo temos funções relacionadas com os recursos, em que vamos ter uma para cada recurso, e com as necessidades que queremos satisfazer.

Habitualmente, existem várias (ou mesmo infinitas) soluções admissíveis para um mesmo programa linear. Mas, como o nosso objetivo é sempre maximizar, ou minimizar a função objetivo, existe uma solução que nos leva a concretizar esse objetivo, essa será a solução ótima do programa linear.

Depois de apresentar o programa linear, consideremos o problema na sua Forma Normal Simples:

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ \text{s. a. } Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

Ou na sua Forma Normal com Capacidades: (este será o modelo que vamos utilizar no decorrer do trabalho)

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ \text{s. a. } Ax = b \\ l_i \leq x_i \leq u_i, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Na resolução de problemas deste tipo, e como só devemos ter desigualdades do tipo  $\geq$ , as desigualdades  $x_i \leq u_i, i = 1, \dots, n$  são transformadas em  $-x_i \geq -u_i, i = 1, \dots, n$ .

## 2.Motivação

O problema que serviu de motivação para a realização deste trabalho foi um problema clássico de Programação Linear, o Problema da Dieta.

Este modelo foi tirado do livro de Chvátal, Vasek, "Linear Programming", da W.H. Freeman and Company New York, USA, 1980 (páginas 3,4 e 5).

### 3. Modelação

Este problema é bastante reduzido e simples, vamos então exercer algumas alterações de modo a chegarmos a um problema mais longo e com resultados mais interessantes. Vamos então proceder às seguintes alterações:

- Aumentar o número de alimentos de modo a este problema ser mais próximo da vida real;
- Considerar uma maior variedade de nutrientes necessários para uma saúde mais equilibrada;
- Incluir alimentos de todas as categorias da roda alimentar, para que se trate de uma dieta mais saudável;
- Termos pelo menos dois alimentos de cada classe da roda alimentar.

Este problema tem uma limitação grave, faz com que a dieta seja repetida dia após dia sem uma grande variedade.

Vamos supor que estamos a planear a alimentação para um dia de um estudante universitário que necessita de ter uma dieta rica, e que em plena época de exames passa grande parte do dia a estudar, e que quanto menos tempo perder na preparação desta alimentação melhor.

O preço dos alimentos deve ser o mais baixo possível, visto que na atualidade estamos em crise, e o estudante não tem muito dinheiro. (Nesta tarefa foram tomados os preços da cadeia de hipermercados Continente.)

Os alimentos são todos de fácil confeção para que este estudante não perca muito tempo na cozinha antes de cada refeição.

Tendo estes pontos em conta faremos uma pesquisa de dados relativos às regras nutricionais e preço de alimentos. Vamos então começar por fazer uma lista de alimentos a ter em conta na resolução do problema.

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7
Laticínios	Frutas	Hortícolas	Cereais, Derivados e Tubérculos	Carne Peixe e Ovos	Leguminosas	Óleos e Gorduras
Leite Magro Iogurtes	Maçãs Laranjas	Alface Cenoura	Arroz Esparguete Batata Pão	Atum (enlatado) Salsichas (enlatadas) Ovos Fiambre Frango Pescada	Feijão Grão de Bico	Azeite Manteiga

Tabela 1 Alimentos Escolhidos para a Dieta

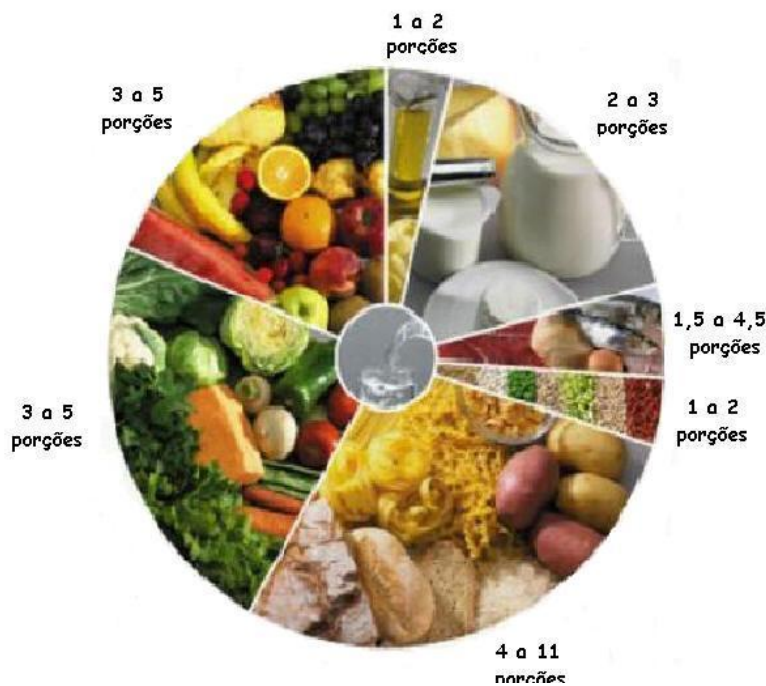


Ilustração 1 Roda dos Alimentos

**Observação:** Consideramos que a água será da responsabilidade de cada pessoa, por isso não a englobaremos na dieta, ainda assim lembramos que um adulto deverá ingerir, em média, 1,5L de água por dia.

Recorremos a alguns sites de modo a recolher os dados nutricionais dos alimentos em estudo, e os preços relativos a esses mesmos alimentos, porém por considerarmos que estes valores não eram o essencial do trabalho não efetuamos um estudo exaustivo sobre o assunto. Devido a esse facto podem existir valores que não correspondam rigorosamente a realidade. Ainda assim tentamos encontrar os valores mais exatos possível.

Temos ainda que dizer que apenas vamos estudar 7 constituintes dos alimentos, uma vez que estes têm muitos constituintes elegemos os seguintes para serem alvos de estudo:

- Energia;
- Proteínas;
- Cálcio;
- Fibras;
- Vitamina C;
- Ferro;
- Lípidos.

## Tabela Nutricional e de preços

Alimentos	Variáveis	Porção (g)	Energia (kcal)	Proteínas (g)	Cálcio (mg)	Fibra (g)	Vitamina C (mg)	Ferro (mg)	Lípidos (g)	Preço/Kg (€)	Preço/porção (cent.)
Leite magro	x1	244g (1copo)	134,2	8,784	390,4	0	2,44	0,732	5,856	0,49	12
logurte	x2	125g	77,5	3,75	137,5	0	1,25	0,125	4,25	2,56	32
Maçãs	x3	138g (1peça)	84,18	0,414	8,28	3,174	8,28	0,552	0,414	1,19	16
Laranjas	x4	131g (1peça)	115,28	1,572	60,26	5,633	78,6	0,9825	0,262	0,85	11
Alface	x5	15g	2,7	0,18	6	0,105	1,8	0,24	0,03	1,3	2
Cenoura	x6	72g (1peça)	30,24	0,648	25,2	1,296	4,32	0,576	0,252	1,29	9
Arroz	x7	100g	360	7,2	9	0,3	0	1,4	0,6	0,74	7
Esparguete	x8	140g	491,4	15,68	33,6	0,56	0	2,52	0,924	0,78	20
Batata	x9	100g	80	42	8	1,9	16	0,9	0,1	0,83	8
Pão	x10	32g (1pão)	100,16	34,56	10,24	0,32	0	0,576	0,576	2,29	7

Tabela 2 Constituição nutricional e preços (Parte 1)

Alimentos	Variáveis	Porção (g)	Energia (kcal)	Proteínas (g)	Cálcio (mg)	Fibra (g)	Vitamina C (mg)	Ferro (mg)	Lípidos (g)	Preço/Kg (€)	Preço/Porção (cent.)
Atum (enlatado)	x11	85g	181,9	20,4	7	0	0	1,598	11,05	5,75	69
Salsichas (enlatado)	x12	100g	330	16,8	10	0	1	2,5	27,1	1,34	14
Ovos	x13	50g (1ovo)	73	5,7	27	0	0	1,25	13,55	(6ovos) 1,09	182
Fiambre	x14	15g	13	0,17	0	0	0	0,135	0	8	12
Frango	x15	150g	364,5	27,45	15	0	3	2,7	21,75	1,96	29
Pescada	x16	150g	141	29,25	40,5	0	0	1,2	2,55	4,99	75
Feijão	x17	80g	288	16,16	380	5,6	2,4	9,52	1,12	0,75	0,6
Grão de Bico	x18	80g	296,8	16,4	120	3,2	1,6	5,6	3,84	0,75	6
Azeite	x19	13g	117	0	0	0	0	0	2,6	2,59	34
Manteiga	x20	20g	150,2	0,2	3,8	0	0	0,4	16,8	4,36	9

Tabela 3 Constituição nutricional e preços (Parte 2)

Para termos uma dieta equilibrada esta tem que satisfazer as necessidades nutritivas seguintes:

Energia (kcal)	Proteínas (g)	Cálcio (mg)	Fibra (g)	Vitamina C (mg)	Ferro (mg)	Lípidos (g)
2000	60	800	35	80	14,4	70

Tabela 4 Necessidades nutritivas de um adulto

## 4. Formulação Matemática

Sejam:

- $x_1, \dots, x_{20}$  os alimentos da tabela 2 e da tabela 3, ao vetor dos  $x_i$  chamaremos  $x$  de modo a simplificar a escrita.
- $c_1, \dots, c_{20}$  os custos associados a cada um dos alimentos.

O objetivo é encontrar  $x_1, \dots, x_{20}$  de modo a minimizar a função:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_{20}x_{20}$$

Isto é,

$$f(x) = 12x_1 + 32x_2 + 16x_3 + 11x_4 + 2x_5 + 9x_6 + 7x_7 + 20x_8 + 8x_9 + 7x_{10} \\ + 69x_{11} + 14x_{12} + 182x_{13} + 12x_{14} + 29x_{15} + 75x_{16} + 0.6x_{17} \\ + 6x_{18} + 34x_{19} + 9x_{20}$$

Tal que  $x_1, \dots, x_{20}$  satisfaçam as restrições:

- Soma de energias de todos os alimentos considerados:  
 $134.2x_1 + 77.5x_2 + 84.18x_3 + 115.28x_4 + 2.7x_5 + 30.24x_6 + 360x_7 \\ + 491.4x_8 + 80x_9 + 100.16x_{10} + 181.9x_{11} + 330x_{12} \\ + 73x_{13} + 13x_{14} + 364.5x_{15} + 141x_{16} + 288x_{17} \\ + 296.8x_{18} + 117x_{19} + 150.2x_{20} \geq 2000$
- Soma das proteínas dos alimentos:  
 $8.784x_1 + 3.75x_2 + 0.414x_3 + 1.572x_4 + 0.18x_5 + 0.648x_6 + 7.2x_7 \\ + 15.68x_8 + 42x_9 + 34.56x_{10} + 20.4x_{11} + 16.8x_{12} \\ + 5.7x_{13} + 0.17x_{14} + 27.45x_{15} + 29.25x_{16} + 16.16x_{17} \\ + 16.4x_{18} + 0x_{19} + 0.2x_{20} \geq 60$



- Soma do cálcio:  

$$390.4x_1 + 137.5x_2 + 8.28x_3 + 60.26x_4 + 6x_5 + 25.2x_6 + 9x_7 + 33.60x_8 + 8x_9 + 10.24x_{10} + 7x_{11} + 10x_{12} + 27x_{13} + 0x_{14} + 15x_{15} + 40.5x_{16} + 380x_{17} + 120x_{18} + 0x_{19} + 3.8x_{20} \geq 800$$
- Soma das fibras a considerar:  

$$0x_1 + 0x_2 + 3.174x_3 + 5.633x_4 + 0.105x_5 + 1.296x_6 + 0.3x_7 + 0.56x_8 + 1.9x_9 + 0.32x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 0x_{15} + 0x_{16} + 5.6x_{17} + 3.2x_{18} + 0x_{19} + 0x_{20} \geq 35$$
- Soma da vitamina C:  

$$2.44x_1 + 1.25x_2 + 8.28x_3 + 78.6x_4 + 1.8x_5 + 4.32x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 16x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 1x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 3x_{15} + 0x_{16} + 2.4x_{17} + 1.6x_{18} + 0x_{19} + 0x_{20} \geq 80$$
- Soma do ferro:  

$$0.732x_1 + 0.125x_2 + 0.552x_3 + 0.9825x_4 + 0.24x_5 + 0.576x_6 + 1.4x_7 + 2.52x_8 + 0.9x_9 + 0.576x_{10} + 1.598x_{11} + 2.5x_{12} + 1.25x_{13} + 0.135x_{14} + 2.7x_{15} + 1.2x_{16} + 9.52x_{17} + 5.6x_{18} + 0x_{19} + 0.4x_{20} \geq 14.4$$
- Soma dos lípidos:  

$$5.856x_1 + 4.25x_2 + 0.414x_3 + 0.262x_4 + 0.03x_5 + 0.252x_6 + 0.6x_7 + 0.924x_8 + 0.1x_9 + 0.576x_{10} + 11.05x_{11} + 27.1x_{12} + 13.55x_{13} + 0x_{14} + 21.75x_{15} + 2.55x_{16} + 1.12x_{17} + 3.84x_{18} + 2.6x_{19} + 16.8x_{20} \geq 70$$

Estas restrições são referentes às tabelas 2, 3 e 4. De seguida apresentamos as restrições referentes à análise da tabela 1 e da ilustração 1.

- Soma das porções do grupo 1:  

$$2 \leq x_1 + x_2 \leq 3$$
- Soma das porções do grupo 2:  

$$3 \leq x_3 + x_4 \leq 5$$
- Soma das porções do grupo 3:  

$$3 \leq x_5 + x_6 \leq 5$$
- Soma das porções do grupo 4:  

$$4 \leq x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \leq 11$$
- Soma das porções do grupo 5:  

$$1.5 \leq x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \leq 4.5$$

- Soma das porções do grupo 6:

$$1 \leq x_{17} + x_{18} \leq 2$$

- Soma das porções do grupo 7:

$$1 \leq x_{19} + x_{20} \leq 2$$

$x_i \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, 20$ .

## 5. Forma Matricial

$$\min c^T x$$

$$s. a. Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Com

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ x_{11} \ x_{12} \ x_{13} \ x_{14} \ x_{15} \ x_{16} \ x_{17} \ x_{18} \ x_{19} \ x_{20}]^T$$

$$c = [12 \ 32 \ 16 \ 11 \ 2 \ 9 \ 7 \ 20 \ 8 \ 7 \ 69 \ 14 \ 182 \ 12 \ 29 \ 75 \ 0.6 \ 6 \ 34 \ 9]^T$$

$$b = [2000 \ 60 \ 800 \ 35 \ 80 \ 14.4 \ 70 \ 2 \ -3 \ 3 \ -5 \ 3 \ -5 \ 4 \ -11 \ 1.5 \ -4.5 \ 1 \ -2 \ 1 \ -2]^T$$

A matriz A segue em anexo por ser uma matriz demasiado extensa.

## 6. Determinação da Solução Ótima

Resolvendo o problema usando o Cplex através do programa Kate, obtemos os seguintes resultados:

- Função objetivo: 203 cêntimos
- Solução ótima:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$	$x_{16}$	$x_{17}$	$x_{18}$	$x_{19}$	$x_{20}$
2	0	5	0	0	4.5	0	0	0.51	3.49	0	1.25	0	0.25	0	0	2	0	0	1

## 7. Conclusão

Neste problema da dieta para um estudante universitário, em que pretendemos uma dieta com um custo mínimo e que preencha as necessidades nutricionais de um adulto a dieta em causa é

- 2 porções de leite magro;
- 5 maçãs;
- 4,5 cenouras;
- 0,51 porções de batata;
- 3,49 pães;
- 1,25 porções de salsichas;
- 0,25 porções de fiambre;
- 2 porções de feijão;
- 1 porção de manteiga.

Esta dieta não aparentando ser muito variada fornece os nutrientes mínimos necessários ao estudante, e equilibra a sua alimentação.

Mais uma vez é de lembrar que o problema tem o inconveniente de a dieta se repetir dia após dia, sem que se diversifique a alimentação. E que não tivemos em conta a quantidade de água que cada indivíduo deve ingerir e que os alimentos contêm.

Este estudante deve então por dia ingerir:

- 2 copos de leite magro;
- 5 maçãs;
- 4,5 cenouras;
- Aproximadamente meia batata;
- Cerca de 3 pães e meio;
- Cerca de 5 salsichas;
- Um quarto de uma fatia de fiambre;
- 160g de feijão;
- 20g de manteiga.

Esta dieta teria o custo de 2,03€.

## 8.Anexos

### 8.1 Programa Cplex

minimize  $12x_1 + 32x_2 + 16x_3 + 11x_4 + 2x_5 + 9x_6 + 7x_7 + 20x_8 + 8x_9 + 7x_{10} + 69x_{11} + 14x_{12} + 182x_{13} + 12x_{14} + 29x_{15} + 75x_{16} + 0.6x_{17} + 6x_{18} + 34x_{19} + 9x_{20}$   
subject to

$134.2x_1 + 77.5x_2 + 84.18x_3 + 115.28x_4 + 2.7x_5 + 30.24x_6 + 360x_7 + 491.4x_8 + 80x_9 + 100.16x_{10} + 181.9x_{11} + 330x_{12} + 73x_{13} + 13x_{14} + 364.5x_{15} + 141x_{16} + 288x_{17} + 296.8x_{18} + 117x_{19} + 150.2x_{20} \geq 2000$

$8.784x_1 + 3.75x_2 + 0.414x_3 + 1.572x_4 + 0.18x_5 + 0.648x_6 + 7.2x_7 + 15.68x_8 + 42x_9 + 34.56x_{10} + 20.4x_{11} + 16.8x_{12} + 5.7x_{13} + 0.17x_{14} + 27.45x_{15} + 29.25x_{16} + 16.16x_{17} + 16.4x_{18} + 0x_{19} + 0.2x_{20} \geq 60$

$390.4x_1 + 137.5x_2 + 8.28x_3 + 60.26x_4 + 6x_5 + 25.2x_6 + 9x_7 + 33.60x_8 + 8x_9 + 10.24x_{10} + 7x_{11} + 10x_{12} + 27x_{13} + 0x_{14} + 15x_{15} + 40.5x_{16} + 380x_{17} + 120x_{18} + 0x_{19} + 3.8x_{20} \geq 800$

$0x_1 + 0x_2 + 3.174x_3 + 5.633x_4 + 0.105x_5 + 1.296x_6 + 0.3x_7 + 0.56x_8 + 1.9x_9 + 0.32x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 0x_{15} + 0x_{16} + 5.6x_{17} + 3.2x_{18} + 0x_{19} + 0x_{20} \geq 35$

$2.44x_1 + 1.25x_2 + 8.28x_3 + 78.6x_4 + 1.8x_5 + 4.32x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 16x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 1x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 3x_{15} + 0x_{16} + 2.4x_{17} + 1.6x_{18} + 0x_{19} + 0x_{20} \leq 80$

$0.732x_1 + 0.125x_2 + 0.552x_3 + 0.9825x_4 + 0.24x_5 + 0.576x_6 + 1.4x_7 + 2.52x_8 + 0.9x_9 + 0.576x_{10} + 1.598x_{11} + 2.5x_{12} + 1.25x_{13} + 0.135x_{14} + 2.7x_{15} + 1.2x_{16} + 9.52x_{17} + 5.6x_{18} + 0x_{19} + 0.4x_{20} \geq 14.4$

$5.856x_1 + 4.25x_2 + 0.414x_3 + 0.262x_4 + 0.03x_5 + 0.252x_6 + 0.6x_7 + 0.924x_8 + 0.1x_9 + 0.576x_{10} + 11.05x_{11} + 27.1x_{12} + 13.55x_{13} + 0x_{14} + 21.75x_{15} + 2.55x_{16} + 1.12x_{17} + 3.84x_{18} + 2.6x_{19} + 16.8x_{20} \geq 70$

$$x_1+x_2 \geq 2$$
$$-x_1-x_2 \geq -3$$

$$x_3+x_4 \geq 3$$
$$-x_3-x_4 \geq -5$$

$$x_5+x_6 \geq 3$$
$$-x_5-x_6 \geq -5$$

$$x_7+x_8+x_9+x_{10} \geq 4$$
$$-x_7-x_8-x_9-x_{10} \geq -11$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16} \geq 1.5$$
$$-x_{11}-x_{12}-x_{13}-x_{14}-x_{15}-x_{16} \geq -4.5$$

$$x_{17}+x_{18} \geq 1$$
$$-x_{17}-x_{18} \geq -2$$

$$x_{19}+x_{20} \geq 1$$
$$-x_{19}-x_{20} \geq -2$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$x_4 \geq 0$$

$$x_5 \geq 0$$

$$x_6 \geq 0$$

$$x_7 \geq 0$$

$$x_8 \geq 0$$

$$x_9 \geq 0$$

$$x_{10} \geq 0$$

$$x_{11} \geq 0$$

$$x_{12} \geq 0$$

$$x_{13} \geq 0$$

$$x_{14} \geq 0$$

$$x_{15} \geq 0$$

$$x_{16} \geq 0$$

$$x_{17} \geq 0$$

$$x_{18} \geq 0$$

$$x_{19} \geq 0$$

$$x_{20} \geq 0$$

end

134.2	77.5	84.18	115.28	2.7	30.24	360	491.4	80	110,16	181.9	330	73	13	364.5	141	288	296.8	117	150.2
8.784	3.75	0.414	1.572	0.18	0.648	7.2	15.68	42	34.56	20.4	16.8	5.7	0.17	27.45	29.25	16.16	16.4	0	0.2
390.4	137.5	8.28	60.26	6	25.2	9	33.60	8	10.24	7	10	27	0	15	40.5	380	120	0	3.8
0	0	3.174	5.633	0.105	1.296	0.3	0.56	1.9	0.32	0	0	0	0	0	0	5.6	3.2	0	0
2.44	1.25	8.28	78.6	1.8	4.32	0	0	16	0	0	1	0	0	3	0	2.4	1.6	0	0
0.732	0.125	0.552	0.9825	0.24	0.576	1.4	2.52	0.9	0.576	1.59	2.5	1.25	0.135	2.7	1.2	9.52	5.6	0	0.4
5.856	4.25	0.414	0.262	0.03	0.252	0.6	0.924	0.1	0.576	11.05	27.1	13.55	0	21.75	2.55	1.12	3.84	2.6	16.8
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1

## 8.2 Matriz A