



**Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade
de Coimbra**

Departamento de Matemática

Actividades Matemáticas

2010/2011

UM ESPECTÁCULO A 3D

**Trabalho elaborado por:
Ana Gonçalves
Helena Alonso
Vânia Torrão**



1. Introdução Histórica

Como se escrevem os números

Muitos nomes de números, notações e símbolos distintos existiram já ao longo da história do mundo. No que se segue descrever-se-ão apenas alguns que tiveram significativa influência na civilização ocidental.

Egípcios

Os Egípcios usavam um sistema de numeração de base 10, do tipo repetitivo. Para os números de 1 a 9 repetia-se um pequeno traço vertical e depois tinham símbolos especiais para as diferentes potências de 10, desde 10 até 10^7 .

Símbolo Egípcio	Descrição do símbolo	O número na nossa notação
	bastão	1
∩	calcanhar	10
9	rolo de corda	100
⌘	flor de lótus	1000
∩	dedo a apontar	10000
🐟	peixe	100000
👤	homem	1000000

Este sistema de numeração tinha uma falha fundamental: não tinha o conceito de valor posicional pelo que um traço só podia representar uma unidade, não cem ou mil, como acontece no sistema que usamos hoje. Embora eles pudessem escrever um milhão só com um símbolo, em vez de sete como nós usamos, se quisessem escrever um milhão menos um, então teriam que recorrer a 54 símbolos o que não era prático.





Sistema Babilônico

O povo Babilônico utilizava um sistema de numeração sexagésimal. Este sistema utilizava apenas dois símbolos Υ (=1) e \leftarrow (=10), o que os obrigava a usar um sistema repetitivo, para representar os elementos componentes de cada ordem no número. Não tinham nenhum símbolo para representar o zero, deixavam algumas vezes um espaço em branco quando não havia unidade de certa ordem mas nunca o espaço em branco aparecia no fim. Outra ambiguidade resulta da falta de vírgula sexagesimal e portanto da indicação do valor absoluto do número. O mesmo número pode representar valores diferentes dependendo da ordem de cada símbolo. Esta interpretação é feita pelo contexto.

O traço mais importante no sistema numérico dos Babilônicos era que reconhecia a notação posicional. Assim como o nosso sistema decimal conta quantas dezenas, centenas e milhares estamos a registrar, a posição de cada número babilônico registava as quantidades de 60 que se estavam a contar. Em vez de inventarem novos símbolos para números cada vez maiores, eles escreviam 111, e este número seria o 3.661.

Sistema Grego

Os Gregos usavam também um sistema decimal, em que utilizavam os sucessivos símbolos do alfabeto grego para exprimir, primeiro, os nossos símbolos 1, 2, ..., 9, depois, as dezenas de 10 a 90 e, finalmente, as centenas de 100 a 900. Como o seu alfabeto tinha apenas 24 letras e eram necessárias 27, os Gregos fizeram ressurgir três letras de origem semítica: *digama* ou *vau*, *qoph* ou *koppa* e o *san* ou *sampi* para representarem 6, 90 e 900, respectivamente. Com a ajuda deste sistema, qualquer número menor que 1000 podia ser escrito com três símbolos no máximo. Existiam vários sistemas para números maiores do que uma miríade (10000). Por exemplo, usava-se um ponto para indicar que os números precedentes deveriam ser multiplicados por 10000.

A representação dos números era feita da seguinte forma:

<i>digama</i>	Ϝ	6
<i>vau</i>	ϝ	
<i>qoph</i>	Ϟ	90
<i>koppa</i>	ϟ	



san ou sampi		900
-----------------	--	-----

$\alpha = 1$	$\iota = 10$	$\rho = 100$
$\beta = 2$	$\kappa = 20$	$\sigma = 200$
$\gamma = 3$	$\lambda = 30$	$\tau = 300$
$\delta = 4$	$\mu = 40$	$\upsilon = 400$
$\varepsilon = 5$	$\nu = 50$	$\phi = 500$
$\zeta = 7$	$\xi = 60$	$\chi = 600$
$\eta = 8$	$\omicron = 70$	$\psi = 700$
$\theta = 9$	$\pi = 80$	$\omega = 800$

Sistema Romano

O facto de ainda estarmos bastante familiarizados com os numerais romanos (usados, por exemplos, nos mostradores de relógios, datas de monumentos e outros documentos antigos) resulta, em grande medida, de terem sido os únicos usados em toda a Europa durante mais de um milhar de anos.

O sistema de numeração romana era baseado num outro semelhante usado pelos Etruscos, donde provêm originalmente as letras I, V, X, L, C, D, M. Os Romanos assimilaram os símbolos originais etruscos  e , usado para 100 e 1000, transformando-os nas letras latinas C e M que eram as iniciais das palavras *centium* e *mille*. Metade de , ou seja, 500, foi simplificado para  ou D.

Os símbolos para

			
5 000	10 000	50 000	100 000

já não são usados hoje em dia.

O símbolo ∞ , uma forma corrompida do sinal , foi proposto por John Wallis, em 1655, para representar o "infinito". Esta proposta foi aceite e o símbolo impôs-se na Matemática.



Atividades Matemáticas 2010 - 2011

Os Romanos usavam um sistema de numeração de base 10, em que alguns símbolos podiam ser repetidos no máximo três vezes. Os símbolos que os Romanos utilizavam representavam os seguintes números:

N. Romano	N. Decimal
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Os símbolos V, L e D não se repetem. As letras I, X ou C colocam-se à esquerda de outras de maior valor para representar a diferença deles, obedecendo às seguintes regras:

1. I só se coloca à esquerda de V ou de X;
2. X só se coloca à esquerda de L ou de C;
3. C só se coloca à esquerda de D ou de M;

Se a um símbolo colocarmos à sua direita um símbolo de menor valor, este último símbolo soma o seu valor ao valor do outro. Ex: VI = 5+1 =6

Se a um símbolo colocarmos à sua esquerda um símbolo de menor valor, este símbolo diminui o seu valor ao valor do outro. Ex: IV = 5-1 = 4

Cada barra sobreposta a uma letra ou a um grupo de letras multiplica o seu valor por mil.

Ex: \bar{V} = 5 000.

Numerais Indo-Árabes

Podemos não saber como os Indianos criaram o seu sistema numérico, mas sabemos que eles o aperfeiçoaram criando os antepassados dos nove números que usamos hoje por todo o mundo. Muitos classificam o sistema numérico indiano como uma das maiores inovações intelectuais de todos os tempos, que se desenvolveu para o que temos de mais parecido com uma linguagem universal. Além disso, terão sido os Indianos a apresentarem, pela primeira vez, o zero. Esta representação está gravada no forte de Gwalior, um local sagrado, na Índia Central.



O sistema de numeração que usamos hoje e que deriva do sistema indiano, formase por justaposição de dez dígitos, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Com apenas 10 dígitos tornou-se possível representar números grandes numa forma incrivelmente eficiente.

Apesar da sua origem, este sistema de numeração é vulgarmente conhecido como sistema de numeração árabe.

Al-Khowarizmi, era um astrónomo e matemático árabe e escreveu, entre outras, uma obra sobre o sistema de numeração Indiano. Nesta obra deu uma exposição muito completa sobre os numerais indianos que provavelmente foi o responsável pela impressão de que o nosso sistema de numeração é de origem árabe. Quando mais traduções latinas da sua obra apareceram na Europa, leitores descuidados começaram a atribuir a numeração ao autor. A nova notação veio a ser conhecida como a de al-Khowarizmi, ou mais descuidadamente, algorismi. Finalmente o esquema de numeração usando numerais indianos veio a ser chamado simplesmente algoritmo ou algoritmo, palavra que originalmente derivada do nome de al-Khowarizmi, agora significa mais geralmente, qualquer regra especial de processo ou operação.

Números noutras bases

Pode definir-se um sistema notacional usando para base um número natural N , qualquer. No sistema de base N , o símbolo $abcd$ significa

$$aN^3 + bN^2 + cN + d$$

Onde os "dígitos" a, b, c, d variam normalmente de 0 até $N-1$.

O sistema indo-árabe é *decimal* (de base 10); o babilónico era *sexagesimal* (de base 60); muitos computadores usam internamente o sistema *binário* (de base 2). Os números escritos na base dois são chamados "números binários". Os números



binários não são, naturalmente, uma nova classe de números. São apenas os números antigos com diferentes nomes:

1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
...	...

Na operação da multiplicação, embora de uma forma indirecta, os egípcios, recorriam à base binária e terão entendido o seu poder mais de três mil anos antes de ter sido revelado o potencial desta base.

2. Números poligonais

Números Poligonais

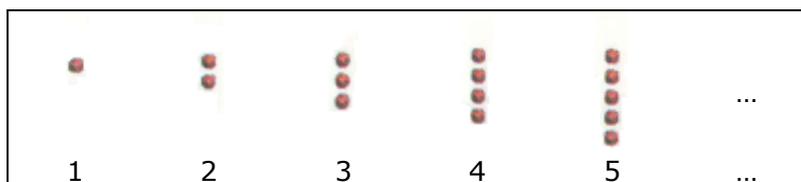
Podem obter-se diferentes espécies de números poligonais adicionando os primeiros n termos de um aprogressão aritmética apropriada sempre começada por 1.

Números de contagem

Progressão aritmética (razão 0): 1, 1, 1, 1, 1 ...

1
1+1=2
1+1+1=3
1+1+1+1=4
1+1+1+1+1=5
1+1+1+1+1+1=6
1+1+1+1+1+1+1=7
...

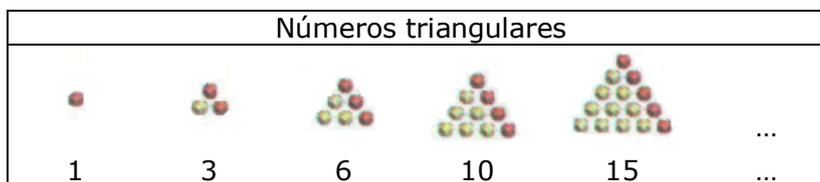
Números de contagem



Números triangulares

Progressão aritmética (razão 1): 1, 2, 3, 4, 5, ...

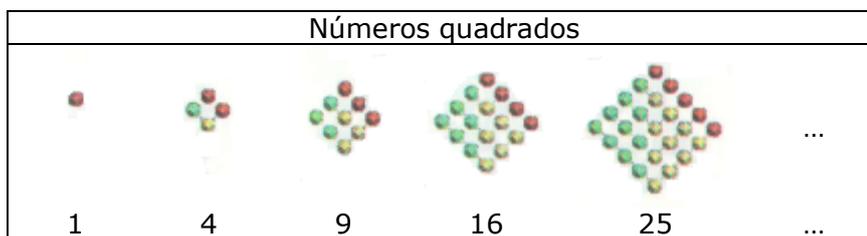
1
 $1+2=3$
 $1+2+3=6$
 $1+2+3+4=10$
 $1+2+3+4+5=15$
...



Números quadrados

Progressão aritmética (razão 2): 1, 3, 5, 7, 9, ...

1
 $1+3=4$
 $1+3+5=9$
 $1+3+5+7=16$
 $1+3+5+7+9=25$
...



Números pentagonais

Progressão aritmética (razão 3): 1, 4, 7, 10, 13, ...

1
 $1+4=5$
 $1+4+7=12$
 $1+4+7+10=22$
 $1+4+7+10+13=35$



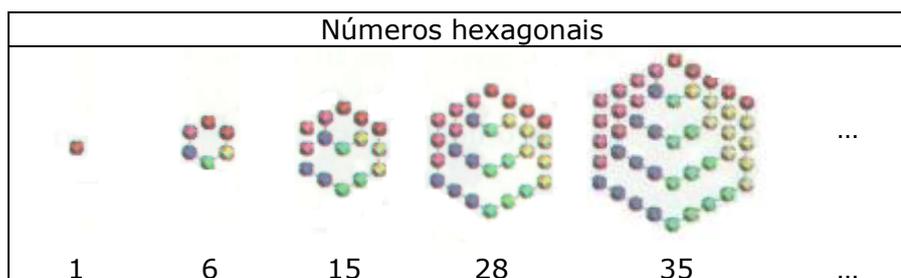
...



Números hexagonais

Progressão aritmética (razão 4): 1, 5, 9, 13, 17, ...

1
 1+5=6
 1+5+9=15
 1+5+9+13=28
 1+5+9+13+17=45
 ...



Números Poligonais								
Números de contagem	1	2	3	4	5	...	n	...
Números triangulares	1	3	6	10	15	...	Δ_n	...
Números quadrados	1	4	9	16	25	...	n^2	...
Números pentagonais	1	5	12	22	35	...	$\frac{1}{2}n(3n - 1)$...
Números hexagonais	1	6	15	28	45	...	$n(2n - 1)$...

Observações:

a) O número de lados do polígono correspondente a cada tipo de números é igual à razão da progressão aritmética respectiva mais dois:

Números Poligonais			
Números de contagem	Razão 0	0+2	2 lados
Números triangulares	Razão 1	1+2	3 lados
Números quadrados	Razão 2	2+2	4 lados
Números pentagonais	Razão 3	3+2	5 lados
Números hexagonais	Razão 4	4+2	6 lados

b) O terceiro elemento de cada sucessão é sempre divisível por 3. E o quinto por 5. E o sétimo? É sempre divisível por 7?



- c) Cada sequência pode obter-se a partir da da linha imediatamente acima juntando a cada polígono o número triangular à esquerda:

n - ésimo número triangular	$\Delta_{n-1} + n = \Delta_n = \frac{1}{2}n(n+1)$
n - ésimo número quadrado	$\Delta_n + \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} + n + \Delta_{n-1} = 2\Delta_{n-1} + n = n^2$
n - ésimo número pentagonal	$n^2 + \Delta_{n-1} = 2\Delta_{n-1} + n + \Delta_{n-1} = 3\Delta_{n-1} + n = \frac{1}{2}n(3n-1)$
n - ésimo número hexagonal	$\frac{1}{2}n(3n-1) + \Delta_{n-1} = 3\Delta_{n-1} + n + \Delta_{n-1} = 4\Delta_{n-1} + n = n(2n-1)$

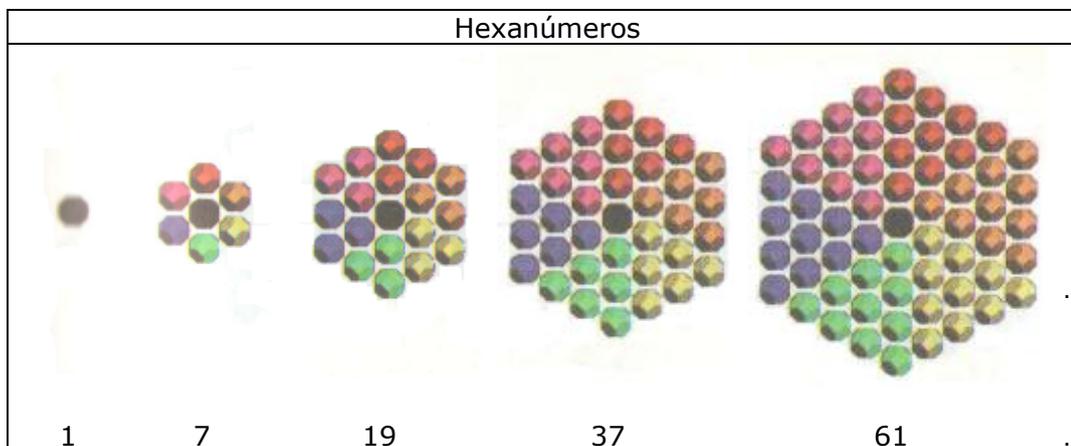
- d) Cada número hexagonal é triangular:

$$n(2n-1) = 4\Delta_{n-1} + n = 3\Delta_{n-1} + \Delta_{n-1} + n = 3\Delta_{n-1} + \Delta_n$$

3. A terceira dimensão

Ainda no plano:

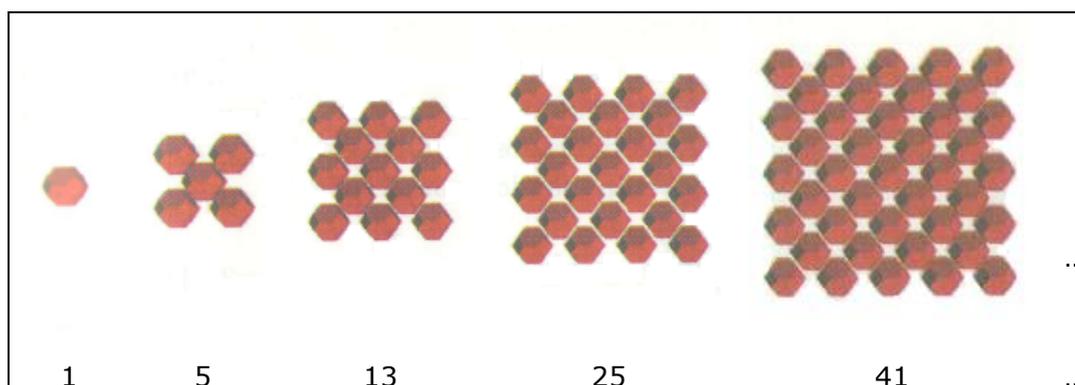
Alguns autores usam a expressão "números hexagonais" para designar os números representados na figura abaixo. Seguindo a sugestão d'O livro dos números, iremos adoptar o nome inventado por Martin Gardner: hexanúmeros.



O n -ésimo hexanúmero é igual a:

$$\mathbf{hex}_n = 1 + 6\Delta_{n-1} = 1 - 3n + 3n^2$$

Números quadrados centrados



O n -ésimo número quadrado centrado é dado por $2n^2 - 2n + 1$:

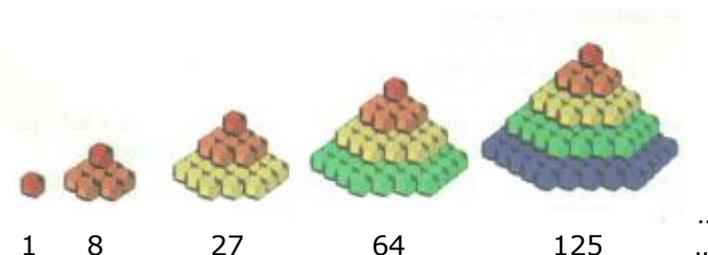
$$(n - 1)^2 + n^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 = 2n^2 - 2n + 1$$

Números tridimensionais

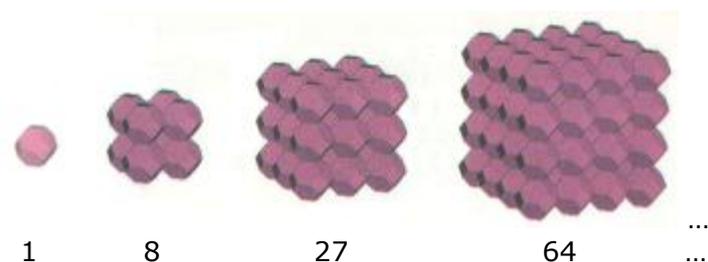
Podem empilhar-se números figurados bidimensionais para gerar números tridimensionais.

1. Hexapirâmides

Suponha-se que se empilham hexanúmeros em hexapirâmides.



Obtêm-se os cubos n^3 , os quais podem obter-se normalmente empilhando-se n quadrados $n \times n$.

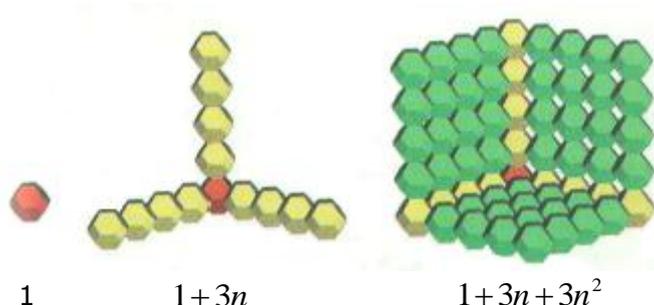


Os hexágonos usados para fazer os hexanúmeros são projecções, ou sombras de cubos.

Para obter o n -ésimo primeiro cubo, começa-se com uma só bolha vermelha e constroem-se em seguida 3 linhas amarelas com n bolhas cada uma; nos espaços entre cada par de linhas cabem três paredes verdes com $n \times n = n^2$ bolhas,



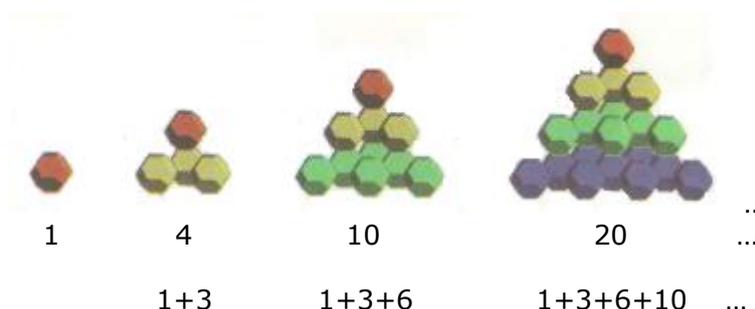
obtendo-se assim uma espécie de concha (constituída por três faces adjacentes) onde encaixa perfeitamente um cubo de $n \times n \times n$ bolhas, o que perfaz um total de $(1+n)^3$. Este é um caso particular do teorema binomial.



2. Números tetraédricos (Tet)

Podemos empilhar números triangulares para formar números piramidais triangulares, ou seja, números tetraédricos.

Abaixo temos os primeiros quatro números tetraédricos. Qual será o n -ésimo número tetraédrico?



Sabendo que há algumas formas engenhosas de empilhar 6 cópias iguais do n -ésimo número tetraédrico numa caixa de dimensões $n \times (n+1) \times (n+2)$, significa que a resposta à questão colocada é

$$\text{Tet}_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

Observações:

- a) Podemos concluir ainda que o produto de três números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de 6, uma vez que os números tetraédricos são números inteiros.
- b) Outra observação passa pelos números dimensionais, ou seja, pelos números triangulares que constituem os números tetraédricos:
 - Consideramos o segundo número tetraédrico. Somamos três vezes este número tetraédrico e obtemos uma estrutura triangular de três quatros



(associamos o segundo número tetraédrico à estrutura triangular de quatros (notar que quatro é dois mais dois))

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ 2 \ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ 1 \ 1 \end{array} = \begin{array}{c} 4 \\ 4 \ 4 \end{array}$$

- Consideramos o terceiro número tetraédrico. Somamos três vezes este número tetraédrico e obtemos uma estrutura triangular de seis dez (associamos o terceiro número tetraédrico à estrutura triangular de cincos (notar que cinco é três mais dois))

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 2 \\ 1 \ 2 \ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ 2 \ 1 \\ 3 \ 2 \ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ 2 \ 2 \\ 1 \ 1 \ 1 \end{array} = \begin{array}{c} 5 \\ 5 \ 5 \\ 5 \ 5 \ 5 \end{array}$$

- Consideramos o quarto número tetraédrico. Somamos três vezes este número tetraédrico e obtemos uma estrutura triangular de nove seis (associamos o quarto número tetraédrico à estrutura triangular de seis (notar que quatro é dois mais dois))

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 2 \\ 1 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ 2 \ 1 \\ 3 \ 2 \ 1 \\ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ 3 \ 3 \\ 2 \ 2 \ 2 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array} = \begin{array}{c} 6 \\ 6 \ 6 \\ 6 \ 6 \ 6 \\ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \end{array}$$

O terceiro triângulo de números pode ser interpretado como o quarto número tetraédrico suportado por uma das suas arestas. Podem somar-se os números lendo-os por camadas:

$$(1 \times 4) + (2 \times 3) + (3 \times 2) + (4 \times 1) = 20$$

- De uma maneira geral:
 - três vezes o n -ésimo número tetraédrico dá o n -ésimo triângulo de números $(n + 2)$.
 - A soma de números, lendo-os, por camadas:

$$(1 \times n) + [2 \times (n - 1) + (3 \times (n - 2))] + \dots + [(n - 1) \times 2] + (n \times 1) = \mathbf{Tet}_n$$

- Outro modo de olhar é somar as diagonais SW-NE da tabela de multiplicação ao lado. Esta tabela é simétrica e os quadrados ao longo da diagonal principal são alternadamente pares e ímpares, isso faz que os números tetraédricos sejam geralmente pares havendo um que é ímpar de quatro em quatro a partir do primeiro

		1	4	10	20	35	56	84
1	2	3	4	5	6	7		
2	4	6	8	10	12			
3	6	9	12	15				
4	8	12	16					
5	10	15						
6	12							
7								

1, 4, 10, 20, **35**, 56, 84, 120, **165**, 220, 286, 364, **455**, 560, ...

3. Números tetraédricos truncados (Ttet)



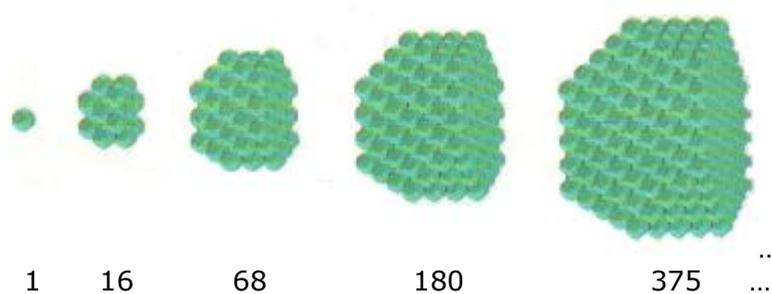
Considerando o $(3n - 2)$ -ésimo número tetraédrico e extraíndo de cada vértice o $(n - 1)$ -ésimo número tetraédrico, obtém-se o n -ésimo número tetraédrico truncado:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Ttet}_n &= Tet_{3n-2} - 4Tet_{n-1} = \\
 &= \frac{1}{6}(3n - 2)(3n - 2 + 1)(3n - 2 + 2) - 4 \times \frac{1}{6}(n - 1)n(n + 1) = \\
 &= \frac{1}{6}(3n - 2)(3n - 1)(3n) - 4 \times \frac{1}{6}(n - 1)n(n + 1) = \\
 &= \frac{1}{6}(27n^3 - 27n^2 + 6n) - 4 \times \frac{1}{6}(n^3 - n) = \\
 &= \frac{1}{6}(27n^3 - 27n^2 + 6n - 4n^3 + 4n) = \\
 &= \frac{1}{6}(23n^3 - 27n^2 + 10n) = \\
 &= \frac{1}{6}n(23n^2 - 27n + 10)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Ttet}_n = Tet_{3n-2} - 4Tet_{n-1} = \frac{1}{6}n(23n^2 - 27n + 10)$$

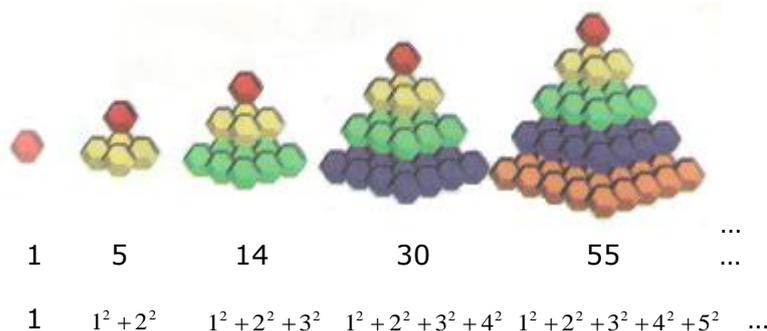
Exemplos:

$\mathbf{Ttet}_1 = Tet_{3 \times 1 - 2} - 4Tet_{1-1} = Tet_1 - 4Tet_0 = 1 - 1 = 0$	$\frac{1}{6} \times 1 \times (23 \times 1 - 27 \times 1 + 10) = 1$
$\mathbf{Ttet}_2 = Tet_{3 \times 2 - 2} - 4Tet_{2-1} = Tet_4 - 4Tet_1 = 20 - 4 \times 1 = 16$	$\frac{1}{6} \times 2 \times (23 \times 2^2 - 27 \times 2 + 10) = 16$
$\mathbf{Ttet}_3 = Tet_{3 \times 3 - 2} - 4Tet_{3-1} = Tet_7 - 4Tet_2 = 84 - 4 \times 4 = 68$	$\frac{1}{6} \times 3 \times (23 \times 3^2 - 27 \times 3 + 10) = 68$
...	...



4. Números piramidais (Pir)

Empilhemos agora números quadrados para formar números piramidais quadrados. $1 + 4 + 9 + \dots + n^2$. Este é o n -ésimo número piramidal, \mathbf{Pir}_n .



Se se conseguir empacotar seis destas pirâmides numa caixa rectangular de dimensões n por $n+1$ por $2n+1$. Se se conseguir fazer tal empacotamento, mostra-se que o n -ésimo número piramidal, $\text{Pir}_n, 1+2^2+3^2+\dots+n^2$, é igual a $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Vejamos os seguintes modos de verificar esta afirmação:

- a) Já foi visto que a soma de dois números triangulares consecutivos é um quadrado perfeito: $\Delta_{n-1} + \Delta_n = n^2$.



Números tetraedricos		Números piramidais quadrados
Tet ₁ , Tet ₂	Tet ₁ + Tet ₂ = $\Delta_1 + (\Delta_1 + \Delta_2) = 1 + 2^2 = 5$	5
Tet ₂ , Tet ₃	Tet ₂ + Tet ₃ = $(\Delta_1 + \Delta_2) + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \Delta_1 + (\Delta_1 + \Delta_2) + (\Delta_2 + \Delta_3) = 1^1 + 2^2 + 3^2 = 14$	14
Tet ₃ , Tet ₄	Tet ₃ + Tet ₄ = $(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4) = \Delta_1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_3 + \Delta_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$	30
...
Tet _{n-1} , Tet _n	Tet _{n-1} + Tet _n = $(\Delta_1 + \dots + \Delta_{n-1}) + (\Delta_1 + \dots + \Delta_n) = \Delta_1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_2 + \dots + \Delta_{n-1} + \Delta_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$	$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
...

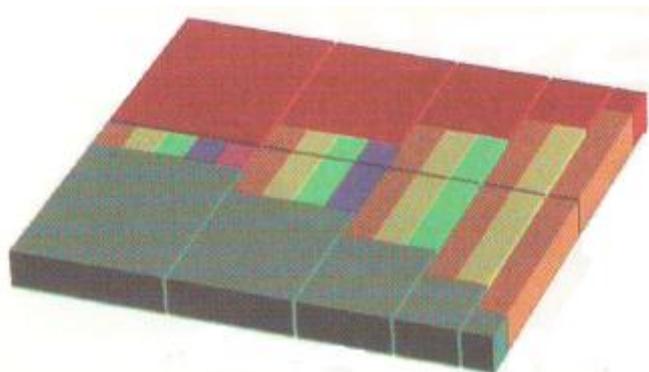
$$\text{Tet}_{n-1} + \text{Tet}_n = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

A soma de dois números tetraédricos consecutivos é um número piramidal quadrado.

$$\text{Pir}_n = \text{Tet}_{n-1} + \text{Tet}_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$



- b)** Empacotem-se as sucessivas camadas de duas pirâmides quadradas (vermelha e azul claro) numa caixa rectangular rasa, de largura $2n+1$ e comprimento Δ_n , o n -ésimo número triangular como mostra a figura abaixo.



Decomponha-se depois o espaço que sobra em tiras rectangulares que podem depois ser recompostas por forma a constituírem as camadas de uma nova pirâmide quadrada como se mostra na figura abaixo.



Verificamos que um número piramidal quadrado, Pir_n , é dado por

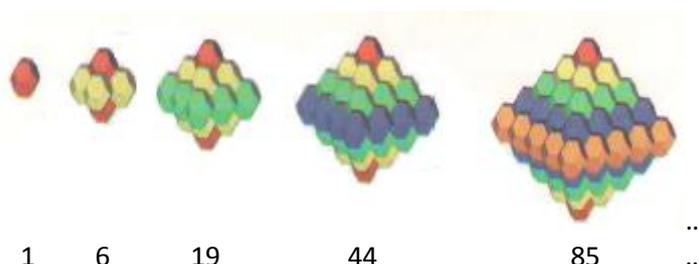
$$\frac{1}{3}\Delta_n \times (2n + 1) = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$

5. Números octaédricos (Oct)

Os números octaédricos são a soma de dois números piramidais quadrados consecutivos

$$\text{Oct}_n = \text{Pir}_{n-1} + \text{Pir}_n = \frac{1}{3}n(2n^2 + 1)$$

Visualizam-se como uma dupla pirâmide quadrada, como se vê na figura :

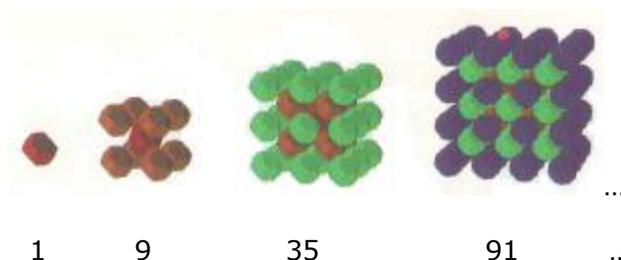




7. Números cúbicos centrados (C cub)

A versão tridimensional dos números quadrados centrados é os **números cúbicos centrados**

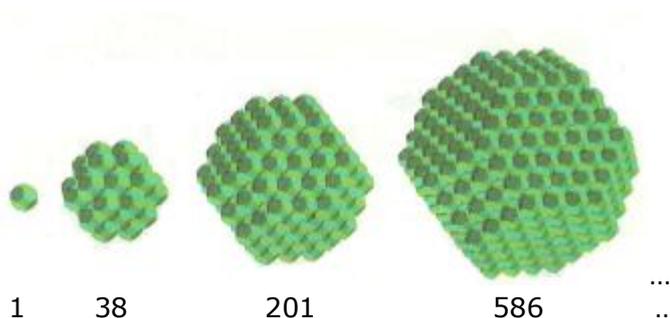
$$C_{cub}_n = n^3 + (n - 1)^3 = (2n - 1)(n^2 - n + 1)$$



8. Números octaédricos truncados (Toct)

Partindo do $(3n - 2)$ -ésimo número octaédrico, Oct_{3n-2} , e cortando a $(n - 1)$ -ésima pirâmide quadrada, Pir_{n-1} , em cada um dos seis cantos, obtém-se os **números octaédricos truncados**.

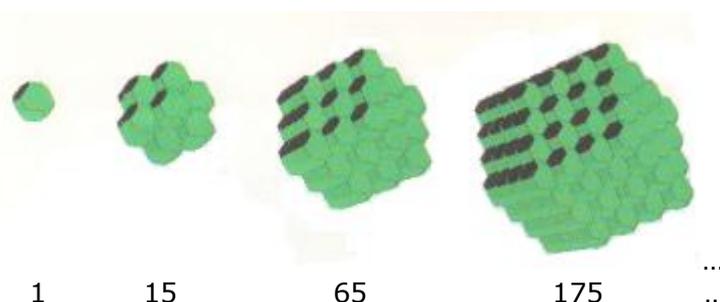
$$\begin{aligned} Toct_n &= Oct_{3n-2} - 6Pir_{n-1} \\ &= \frac{1}{3}(3n - 2)[2(3n - 2)^2 + 1] - \frac{6}{6}(n - 1)n(2n - 1) \\ &= 16n^3 - 33n^2 + 24n - 6 \end{aligned}$$



9. Números Dodecaédricos Rômbicos (Rom)

Num espaço completamente preenchido (por octaedros truncados), o lugar geométrico de todas as células que estão a uma distância inferior a n células de uma célula dada tomada para centro tem uma forma dodecaédrica rômbica. Este número pode ser visualizado juntando a cada uma das seis faces de um cubo uma pirâmide quadrada. Assim um número dodecaédrico rômbico é dado por:

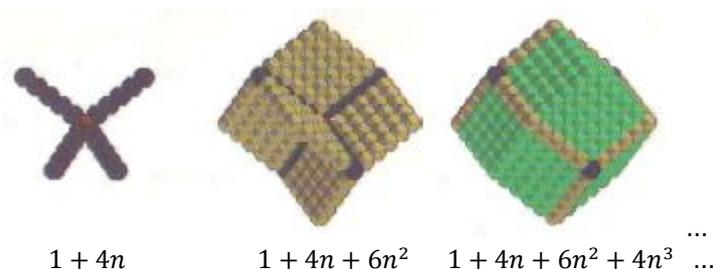
$$Rom_n = C_{cub}_n + 6Pir_{n-1} = (2n - 1)(2n^2 - 2n + 1)$$





A formação de Rom_{n+1} é construída da seguinte forma:

Inicia-se com uma bolha vermelha, com as faces hexagonais, em que das suas faces, alternadamente, partem quatro varas azuis com n células cada uma.



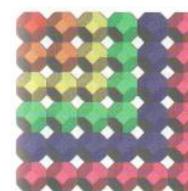
Juntam-se seis paredes amarelas com $n^2 n^2$ células cada uma, entre cada duas varas. Insere-se quatro blocos de n^3 células verdes limitados por três paredes amarelas, como mostra a figura.

Números deste tipo podem ser definidos em todas as dimensões:

Dim	$(n + 1)$ -ésimo número	
0	1	unidade
1	$1 + 2n$	números ímpares
2	$1 + 3n + 3n^2$	hexanúmeros
3	$1 + 4n + 6n^2 + 4n^3$	números dodecaédricos rômnicos
4	$1 + 5n + 10n^2 + 10n^3 + 5n^4$	números conexos seguintes

4. Curvando o número conexo seguinte

Um *gnómon* para os Gregos era uma peça que podia juntar-se a uma figura para produzir uma figura da mesma forma, mas de tamanho maior. Na figura seguinte, cada *gnómon* contém um número ímpar de bolhas da mesma cor.



Estes números ímpares dobrados em ângulos rectos, dão *gnómons* que podem empilhar-se para formar quadrados.

$$odd_1 + odd_2 + \dots + odd_n = n^2$$

Já foi visto que empilhando números hexanúmeros se obtém cubos.

$$hex_1 + hex_2 + \dots + hex_n = n^3$$

De forma semelhante, podem curvar-se a quatro dimensões números dodecaédricos rômnicos, que empilhados formam cubos quadridimensionais, ou tesselas.

$$Rom_1 + Rom_2 + \dots + Rom_n = n^4$$



5. Quarta dimensão

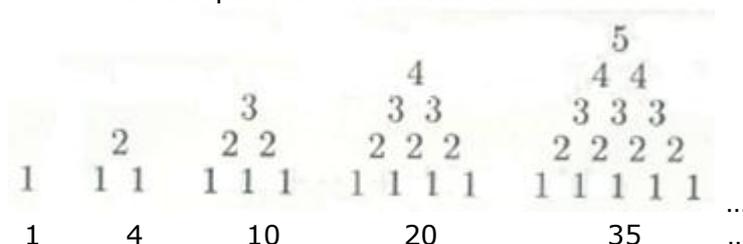
1. Números pentatónicos

Os números pentatónicos, são números a quatro dimensões que resultam da junção dos números tetraédricos, 1, 4, 10, 20,

Somando então estes números, originam os números pentatónicos:

1	=	1	=	P_{top_1}
1+4	=	5	=	P_{top_2}
1+4+10	=	15	=	P_{top_3}
1+4+10+20	=	35	=	P_{top_4}
1+4+10+20+35	=	70	=	P_{top_5}
1+4+10+20+35+56	=	126	=	P_{top_6}
...	

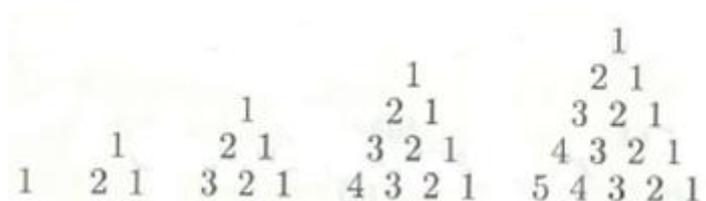
Uma forma de formar estes números sem sair do espaço bidimensional. A figura seguinte mostra os 5 primeiros números tetraédricos



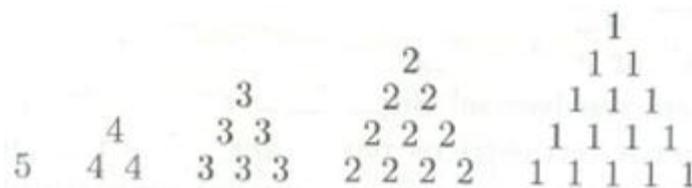
Copiando estes números três vezes e arranjando-os de forma diferente vamos obter



Trocamos o elemento superior com o elemento mais à direita, depois trocamos a segunda linha superior com a coluna na diagonal justaposta ao elemento mais à direita. De seguida trocamos a terceira linha superior com a coluna diagonal justaposta à que foi trocada anteriormente e assim sucessivamente.

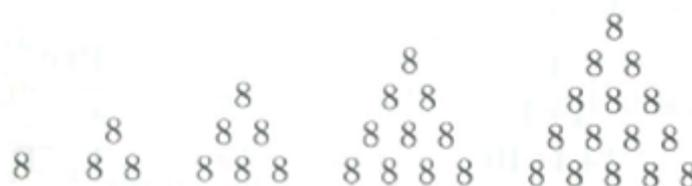


O processo é idêntico ao anterior mas a troca das linhas é feita com as colunas à esquerda.



Os números são agrupados por linhas. O primeiro número corresponde à 5ª linha a contar de baixo, o segundo número corresponde à 4ª linha de todos os elementos, e terceiro corresponde à terceira linha e assim sucessivamente.

Se adicionarmos, nas quatro cópias, todos os números que se encontram na mesma posição, obtém-se sempre o mesmo resultado, o número 8 que é $(5+3)$.



O número de posições é igual à soma dos cinco primeiros números triangulares, e por sua vez igual ao 5º número tetraédrico.

Podemos então concluir que para o caso geral, quatro cópias dos primeiros n números tetraédricos somam $(n+3)$ (dá-nos o elemento) vezes o n -ésimo número tetraédrico (dá-nos o número de elementos), $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

Então o n -ésimo número pentagónico é dado por:

$$P_{top_n} = \frac{1}{4}Tet_n(n+3) = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

O produto de quatro números inteiros consecutivos é sempre divisível por 24.

Os números originados pela soma de cubos são também um número quadridimensional.

A figura seguinte representa uma tabela de multiplicação em que na diagonal principal estão os números quadrados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

A figura seguinte representa também uma tabela de multiplicação mas com gnómons. A soma dos elementos de cada gnómon dá-nos um cubo.



$1^5 \rightarrow$	1	2	3	4	5
$2^5 \rightarrow$	2	4	6	8	10
$3^5 \rightarrow$	3	6	9	12	15
$4^5 \rightarrow$	4	8	12	16	20
$5^5 \rightarrow$	5	10	15	20	25

Os gnómon contêm

$$\begin{aligned}
 1(1) &= 1 \times 1^2 = 1^3 \\
 2(1 + 2 + 1) &= 2 \times 2^2 = 2^3 \\
 3(1 + 2 + 3 + 2 + 1) &= 3 \times 3^2 = 3^3 \\
 4(1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1) &= 4 \times 4^2 = 4^3 \\
 5(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) &= 5 \times 5^2 = 5^3
 \end{aligned}$$

Mas o total dos números da tabela da multiplicação é o produto

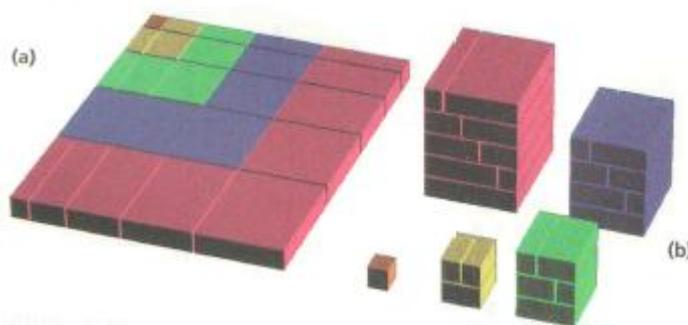
$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = (\Delta_5)^2$$

E como a soma dos números ímpares seguintes dá números cúbicos

$$\begin{aligned}
 1 &= 1^3 \\
 3 + 5 &= 2^3 \\
 7 + 9 + 11 &= 3^3 \\
 13 + 15 + 17 + 19 &= 4^3 \\
 21 + 23 + 25 + 27 + 29 &= 5^3 \\
 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 &= 6^3 \\
 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 &= 7^3
 \end{aligned}$$

Podemos concluir que a soma dos primeiros n cubos é dada por $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)$ que é igual ao quadrado do n -ésimo número triangular $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

A figura seguinte mostra o quadrado de lado $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$ cortado em retângulos (a). A figura (b) mostra esses retângulos agrupados de forma a constituírem os cinco cubos.



O quadrado de um número triangular é uma soma de cubos.



6. Mais dimensões

Pode-se continuar a empilhar pirâmides triangulares num número cada vez maior de dimensões usando o mesmo processo que foi usado para a construção dos cubos $(n+1)$ através das hexapirâmides e na construção dos dodecaédricos rômnicos $(n+1)$.

$$\begin{aligned}1+1+1+\cdots+1 &= n \\1+2+3+\cdots+n &= \frac{1}{2}n(n+1) \\1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1) &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \\1+4+10+\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) &= \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3) \\1+5+15+\cdots+\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3) &= \cdots\end{aligned}$$

O que dá os números de contagem, os triangulares, os tetraédricos e os pentatônicos. Embora não haja mais nomes, as dimensões nunca se esgotam. Os primeiros números que não têm nome são:

$$\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

E concluí-se que o produto de cinco números inteiros consecutivos é divisível por $120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$.



Bibliografia

Du Sautoy, M. (apresentador e argumentista). (2008). *The Language of the Universe* [Filme]. BBC, Open University.

Du Sautoy, M. (apresentador e argumentista). (2008). *The Genius of the East* [Filme]. BBC, Open University.

Conway, J. H., Guy, R. K. (1999). *O livro dos números*. Universidade de Aveiro, Gradiva.

Boyer, C. B.. *História da Matemática*: tradução: Gomide, E. F.. (1974). São Paulo, Edgard Blucher Ltda.