

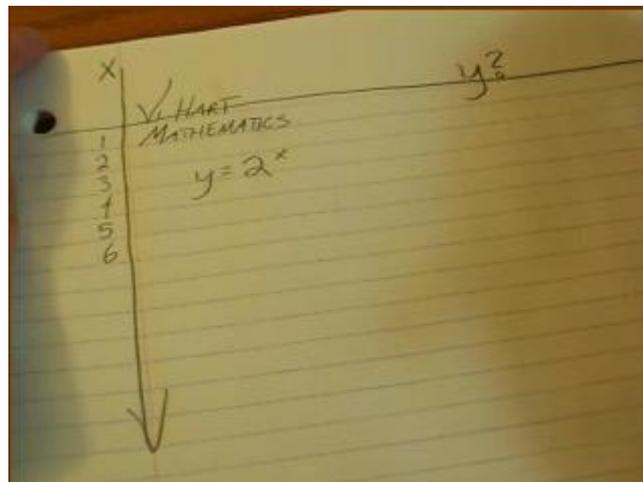


Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra

Meios Computacionais no Ensino

Professor Jaime Carvalho e Silva

Rabiscos na aula de matemática



Ana Filipa Marques Gonçalves

23 de Junho de 2011

Índice

Introdução.....	3
Desenvolvimento.....	5
Alguns conceitos	5
Definição de função exponencial	5
Definição de sucessão	5
Definição de progressão geométrica	5
Árvores Binárias e Ternárias.....	6
Fractal.....	6
Triângulo de Sierpinski.....	6
Erros aleatórios.....	7
Entes míticos	7
Hércules	7
A luta de Hércules contra Hidra	8
<i>Contando a história</i>	9
Rabiscos na aula de Matemática - Árvores Binárias	9
Conclusão.....	18
Referências Bibliográficas.....	20

Introdução

Este trabalho, realizado no âmbito da cadeira Meios Computacionais do Ensino, consiste na abordagem de um dos temas disponíveis no sítio *The Geometry Junkyard*¹.

O trabalho deverá ser enviado para o Professor Jaime Carvalho e Silva pelo moodle - *moodle at hilbert.mat.uc.pt*² - para que assim possamos interagir com esta plataforma que é usada pelas nossas escolas, e assim adquirir competências. É de referir que foram disponibilizados os links de acesso aos conteúdos ou assuntos em questão no *moodle at hilbert.mat.uc.pt* para favorecer esta interacção. Refiro, no entanto, que já tive oportunidade de trabalhar com esta plataforma em diferentes situações. A primeira como responsável pela plataforma ficando ao meu cargo a criação das contas e cargos atribuídos, por exemplo. A segunda como professora, no ano lectivo passado e a terceira como aluna, neste ano lectivo.

Pretende-se ainda que todas as imagens que constem no trabalho sejam criadas ou no software *Cinderella*³ – programa de Geometria Dinâmica da autoria de J. Richter – Gebert e U. H. Kortenkamp focado na investigação de construções geométricas de grande qualidade – ou no software *Poly*⁴ – programa de Geometria focado na exploração de poliedros.

A primeira fase do trabalho, que consistiu na escolha do tema ou do assunto a abordar ou a desenvolver, não foi fácil considerando a panóplia de temas disponibilizados no sítio acima referido. Por outro lado, as dificuldades na língua inglesa também não facilitaram esta primeira etapa, pelo contrário. No entanto, após vários cliques e leituras, no sítio *New junk* (devido a indisponibilidades do moodle, houve a necessidade de aceder directamente ao sítio *The Geometry Junkyard*), entrei em *Dodecahedral melon and other fruit polyhedra, by Vi Hart* e aí, em *Math Doodling*⁵ tive oportunidade de ver uma gravação que me despertou a atenção – *Doodling in Math Class: Binary trees* – não por ser novidade, até porque tive oportunidade de vê-la recentemente a ser projectada, mas porque, apesar de não ter compreendido na totalidade a sua mensagem, fiquei com a sensação que havia algo de *valor* naquela gravação.

Assim, o meu trabalho consiste em *contar a história contada na gravação* acima referida, com alterações mínimas. As imagens acompanham o texto e pretendem ilustrar os jogos e/ou as histórias e até o pensamento de quem conta a história.

Esta gravação refere algumas das dificuldades presentes nas salas de aulas nomeadamente a forma como os conteúdos são abordados que nem sempre cativam os alunos e, desta forma, nem sempre lhes é dada a oportunidade de compreenderem a beleza dos conteúdos e até mesmo das disciplinas e, neste caso particular, a beleza da Matemática e dos seus conteúdos. Por outro lado, nem sempre as estratégias e/ou as metodologias de ensino são as mais adequadas para manter os alunos atentos ao

¹ www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/

² hilbert.mat.uc.pt/Moodle/

³ www.cinderella.de/tiki-index.php

⁴ www.peda.com/poly/

⁵ <http://vihart.com/doodling/>

que o professor traz para a sala de aula. Apesar das circunstâncias, os alunos não têm escolha e têm que permanecer nas salas de aula mesmo que em pensamento não se encontrem nesse mesmo local. Então, para acelerar a velocidade do tempo da aula, uma das possibilidades traduz-se nos riscos e rabiscos que podem fazer nos seus cadernos. E, nalguns casos, alguns alunos inventam histórias ou jogos quando riscam e rabiscam. O mais interessante é quando estes rabiscos reflectem matemática, até a que está a ser abordada na sala de aula, mas sob um ponto de vista diferente no qual é possível encontrar outro interesse e beleza.

As figuras que constam neste trabalho foram construídas no software *Cinderella.*, pelo que, também aqui, foi favorecida a interacção com este programa.

Desenvolvimento

Antes de contar a história, irei apresentar algumas notas breves acerca dos conceitos que são referidos na história assim como dos entes míticos que intervêm nas histórias e/ou jogos.

Alguns conceitos

Definição de função exponencial

Chama-se **função exponencial** de base a à correspondência

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto a^x, \quad \text{com } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$

Consideremos o exemplo $f(x) = 2^x$. Neste caso a base a toma valor 2. Esta função está representada graficamente na figura ao lado.



Representação gráfica da função
 $f(x) = 2^x$

Definição de sucessão

Chama-se **sucessão** de números reais a uma função que faz corresponder a cada número natural um número real. A sucessão u é a função tal que: $\mathbb{N} : \longrightarrow \mathbb{R}$

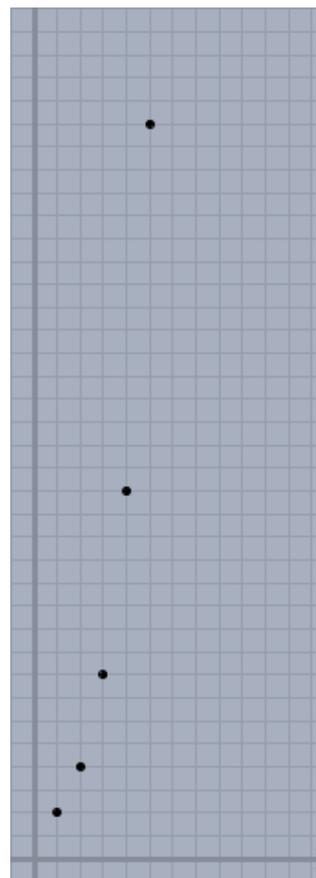
$$n \mapsto u_n.$$

Definição de progressão geométrica

Uma **progressão geométrica** é uma sucessão em que é constante o quociente entre cada termo⁶ e o anterior. Essa constante é chamada de **razão**, r , da progressão.

⁶ Subentende-se que o termo tem antecessor, o que não acontece com o primeiro.

Consideremos o exemplo $u_n = 2^n$. Neste caso, como $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$, então, a sucessão dada é uma progressão geométrica de razão 2. Vejamos a sua representação gráfica (figura ao lado).



Representação gráfica da sucessão de termo geral $u_n = 2^n$

Optei por colocar quer a definição de função exponencial quer a definição de progressão geométrica uma vez que ambos os termos são referidos. Apesar do interesse da mensagem, é necessário algum espírito crítico uma vez que os conceitos acima referidos são confundidos. Ao longo do texto é possível verificar que são feitas referências às *funções exponenciais*, no entanto, as figuras referem-se à *progressão geométrica de razão 2*.

Árvores Binárias e Ternárias

Relativamente a estes conceitos, consideremos apenas uma abordagem intuitiva. Assim, consideramos uma árvore binária ou uma árvore ternária sempre que cada ramo (linha) originar dois ramos ou três ramos (linhas), respectivamente.

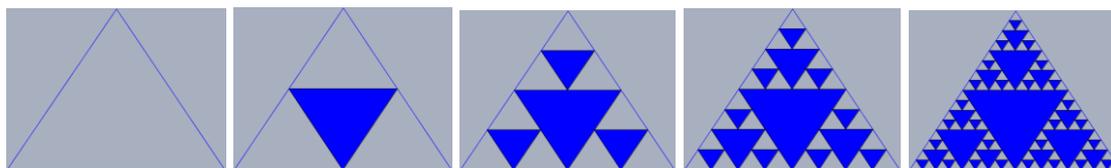
Fractal

[do latim fractus, fracção, quebrado] Apesar da dificuldade em definir um fractal, este pode ser entendido como uma forma em que as partes são semelhantes ao todo.

Triângulo de Sierpinski

O **triângulo de Sierpinski** é o conjunto resultante da remoção sucessiva do triângulo equilátero do centro, quando se divide um triângulo equilátero em quatro triângulos iguais. O triângulo de Sierpinski é um fractal.

As imagens seguintes demonstram os primeiros cinco passos da construção do triângulo de Sierpinski:



Erros aleatórios

São devidos a causas diversas e incoerentes ou que não seguem uma tendência fixa.

Entes míticos

Hércules

Hércules – mitologia grega – era filho de Júpiter e de Alcmena, mulher de Anfitrião, rei de Tebas.

Júpiter, para enganar Alcmena na ausência do marido, então envolvido na guerra com os Teléboas, povo da Acamânia, tornou-se semelhante a Anfitrião e foi encontrar-se com ela. Desse encontro resultou o nascimento de Hércules, a quem Júpiter prometera um alto destino.

Ainda menino, Hércules deu provas da sua força e valentia. No tempo em que desceu aos infernos, Lico, que chegou a ser rei de Tebas por usurpação, quis obrigar Mégara, mulher de Hércules, a aceitá-lo como marido. Mas Hércules, que oportunamente regressara, matou Lico.

Juno, sempre indignada contra Hércules, que era filho de uma concubina de seu marido, considerou injusto este crime e inspirou em Hércules tal fervor que ele acabou por matar Mégara e os filhos que tinha dela.

Como Juno estava desejosa de se livrar do herói, instigou o irmão mais velho deste, Eristeu, que o odiava, a obrigá-lo a realizar doze empreendimentos difíceis e perigosos, que ficaram conhecidos pelos «Doze trabalhos de Hércules»: estrangular o leão de Nemeia; capturar a corça dos pés de bronze; matar as aves do lago Estinfalo; matar a hidra de Lerna; capturar vivo o javali de Erimanto; matar Diomedes, rei da Trácia, que alimentava os seus cavalos de carne humana; vencer as Amazonas; dominar Cérbero, o cão que guardava os infernos, e libertar Teseu; matar o feroz touro de Creta; limpar os estábulos do rei da Élide; matar o gigante Gérion; apanhar do jardim das Hespérides as maçãs de ouro.

Hércules levou a bom termo todas estas façanhas e ainda outros trabalhos de igual perigo e dificuldade: estrangulou o gigante Anteu, filho da Terra; livrou Hesíona, princesa da Frígia, do monstro que queria devorá-la, etc.

Foram tantas e tão gloriosas as ações levadas a cabo por Hércules, que, depois da sua morte, o incluíram no número dos deuses e lhe deram Hebe, deusa da mocidade, por mulher.

Hércules representa-se na figura de um homem robusto e musculoso, coberto com uma pele de leão e armado com uma maça muito pesada.

A luta de Hércules contra Hidra

Um dos desafios de Hércules foi o da hidra de Lerna, a enorme serpente de nove cabeças com corpo de dragão, filha de Tifo e Equidna. O seu hálito era venenoso e assolava a região de Lerna, no Peloponeso.

Acompanhado de Iolaus, seu sobrinho, Hércules tentou cortar as cabeças da serpente mas, por cada cabeça cortada, nasciam mais duas. Então, Hércules ordenou que Iolaus preparasse uma tocha com ramos secos. Assim, cada vez que Hércules cortava uma das cabeças da hidra, o seu sobrinho cauterizava a ferida feita impedindo o crescimento das duas cabeças.



"A Luta de Hércules contra a Hidra",
por L' Antico

Sobrou então a cabeça do meio que se dizia imortal. Hércules cortou-a e enterrou-a com pedras. Depois mergulhou a ponta das suas setas no sangue da serpente, tornando-as venenosas e mortais.

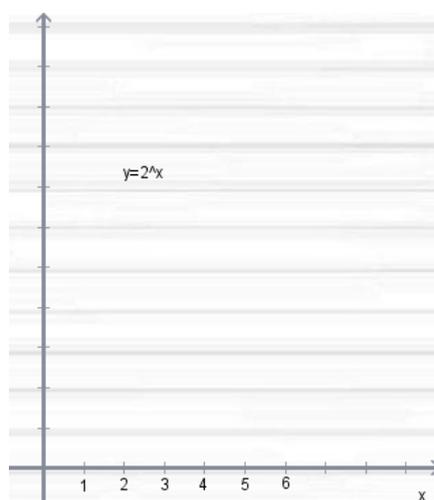
Contando a história...

Rabiscos na aula de Matemática - Árvores Binárias

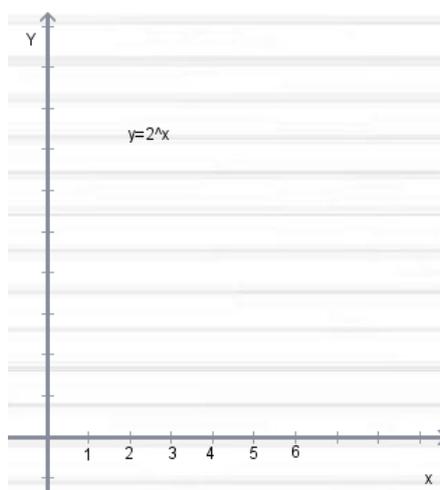
Vamos fazer de conta que tu és eu e que estás na aula de matemática.

O teu professor está a explicar a matéria de funções exponenciais e é suposto estares a aprender. Mas não estás a conseguir concentrar-te nas funções exponenciais porque, infelizmente, a tua aula de matemática não é suficientemente interessante nem envolvente.

É suposto desenhares e legendares os eixos para representares graficamente esta coisa $y = 2^x$, e parece que o teu professor pensa que desenhar eixos e legendá-los é a essência da matemática,



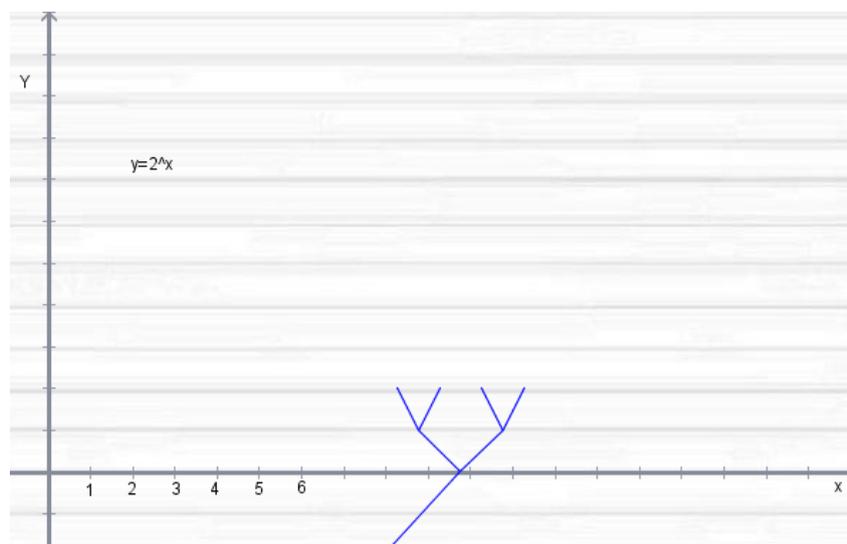
mas estás aborrecido e não podes ajudá-lo e pergunto: Y? (why?).



Então fazes o que qualquer estudante consciente faria nesta situação e comesças a fazer rabiscos. E como tu és eu, gostas de jogar e inventar histórias quando fazes rabiscos.

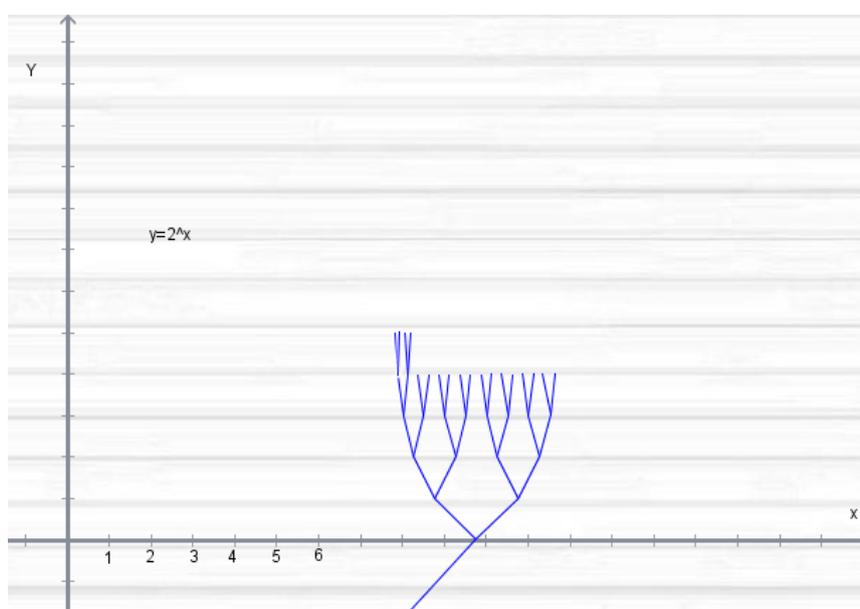
Aqui está um jogo:

Desenhas uma linha, mas quando ela cruza uma das linhas da folha do teu caderno, ela divide-se em duas linhas.



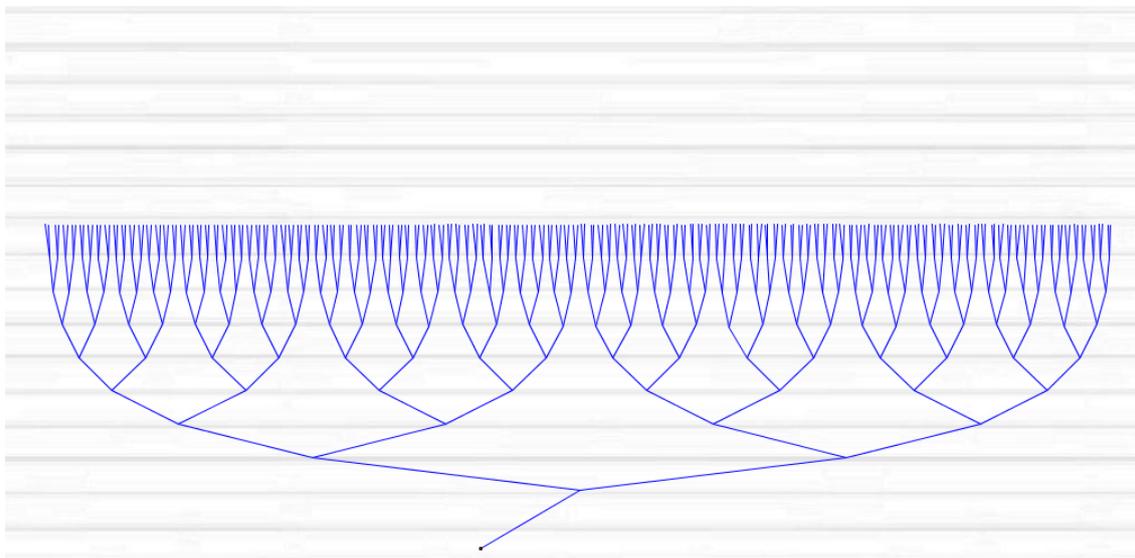
Talvez esta linha seja como o pescoço da hidra, em que sempre que uma das suas cabeças é cortada por uma linha da folha, crescem duas no seu lugar.

Tentas chegar ao início da folha seguindo esta regra porque, se conseguires, então significa que consegues desenhar todas as cabeças da hidra.



Mas não chegas longe na primeira tentativa!

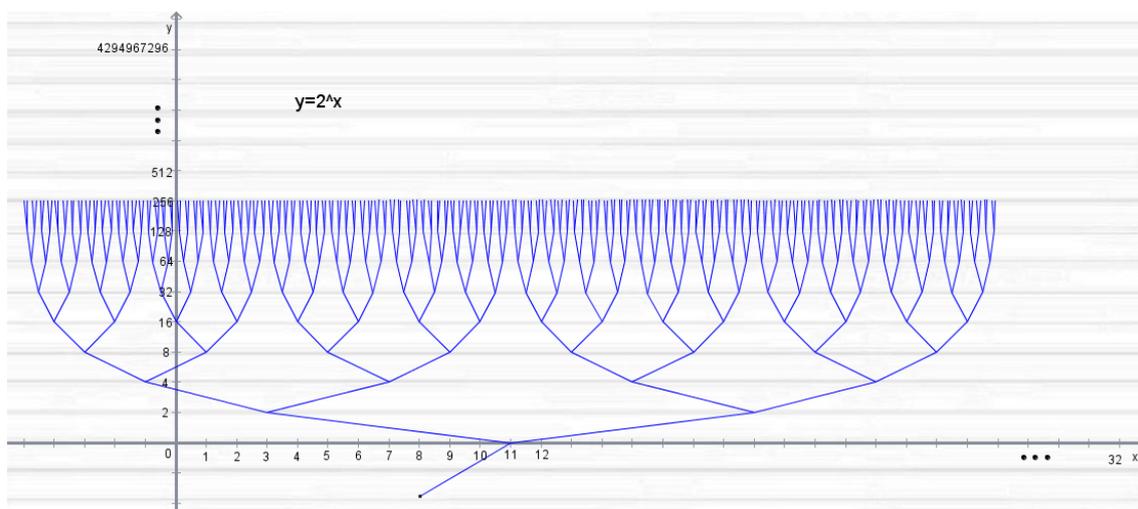
Tentas novamente. Desta vez deixas mais espaço entre as linhas iniciais que desenhaste. Infelizmente, as linhas do teu caderno estão a preencher-se rapidamente embora tenhas conseguido chegar mais longe.



Ajudava se tivesses mais espaço! Se afiares o lápis, talvez consigas preencher a folha toda até ao início!

Ah, e não te esqueças de colocar os eixos e de legendá-los. Se cada movimento da espada de Hércules cortar as cabeças de forma a duplicar o seu número, bom... (4 294 967 296)... vez onde quero chegar! Neste caso, iremos ter muitas cabeças.

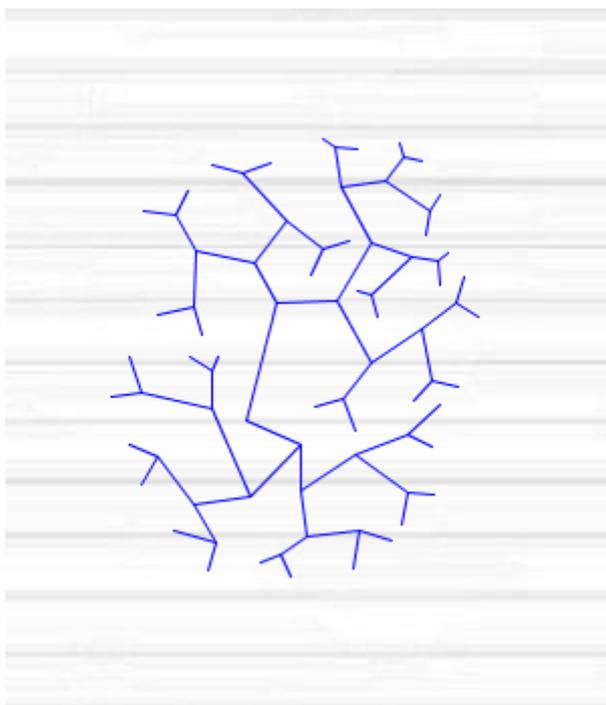
Boa sorte Hércules.



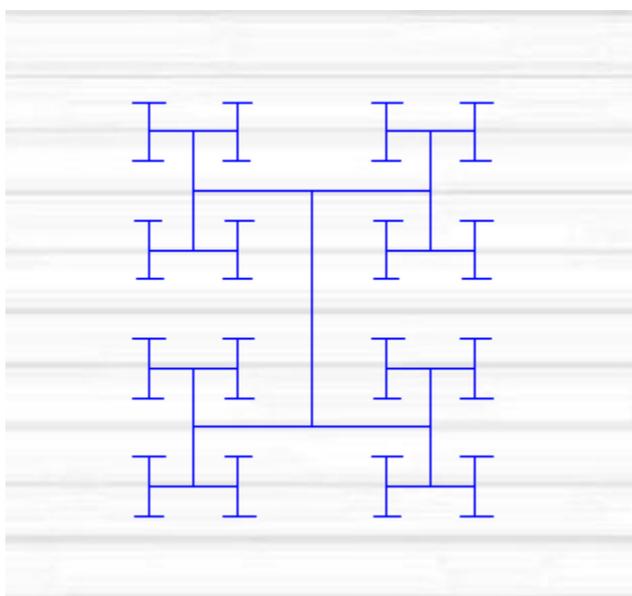
Não estou a tentar ensinar matemática, só como usá-la nos riscos e rabiscos.

Mas, desenhar árvores binárias com linhas rectas como esta, talvez não te prenda a atenção por muito tempo.

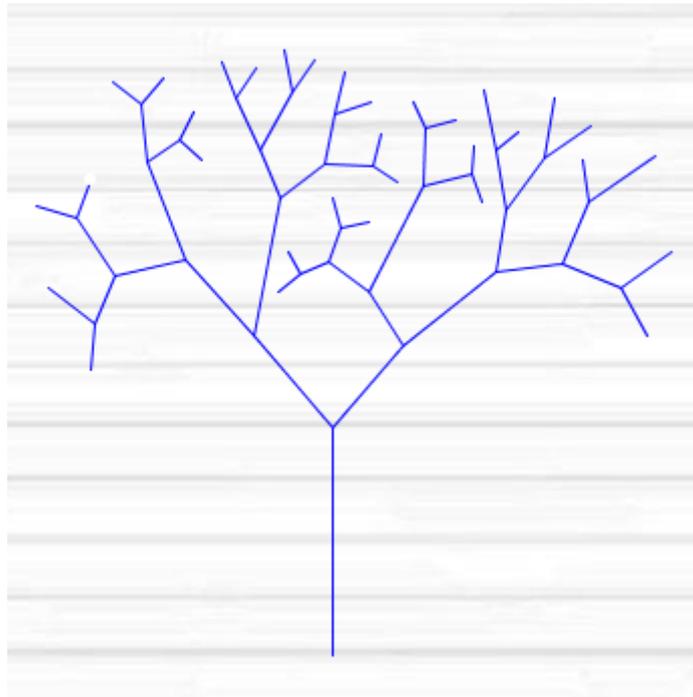
Então começa a desenhá-las em formas arbitrárias.



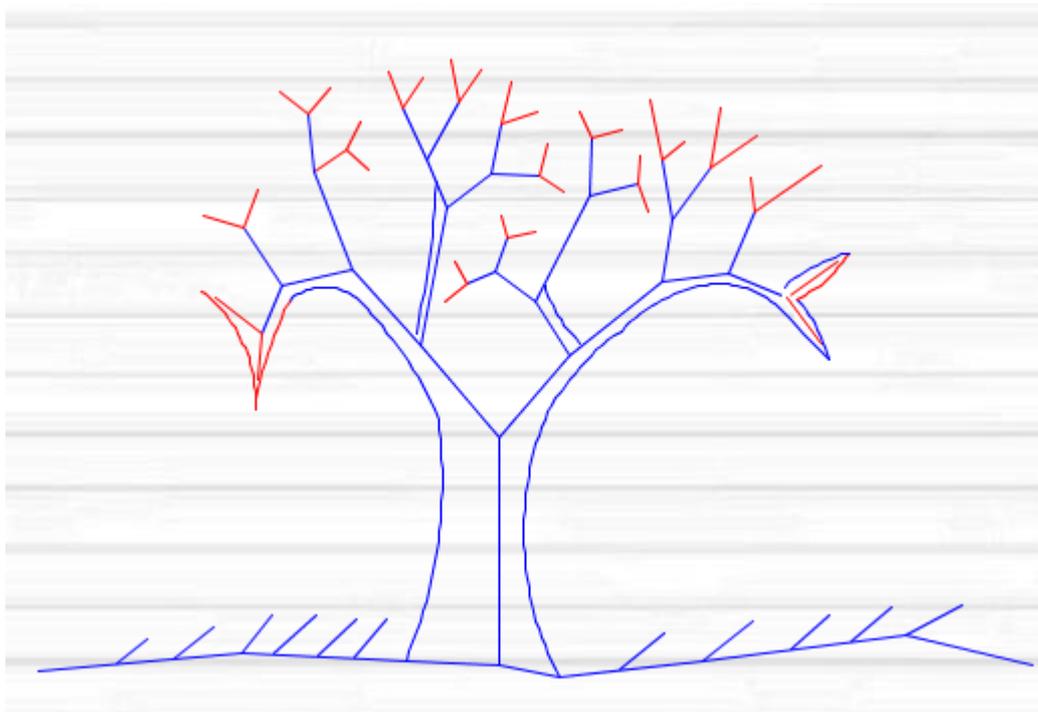
Ou formas menos arbitrárias.



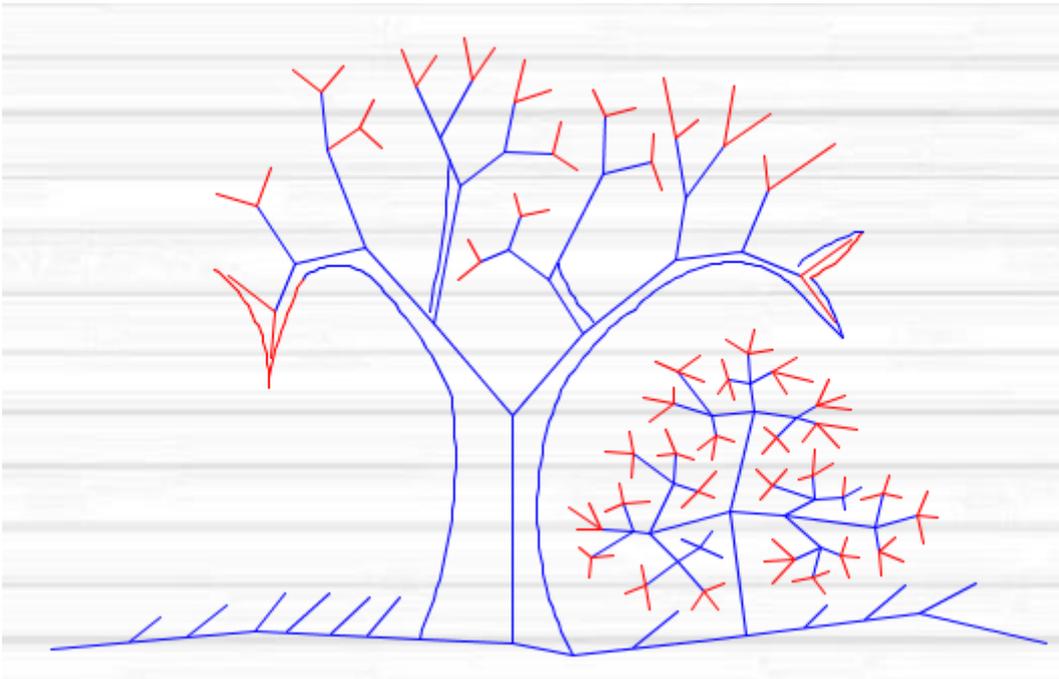
Talvez comeces a desenhar árvores binárias que pareçam uma árvore



E talvez não a vejas focada porque o teu computador, como a tua aula de matemática, é confuso, desfocado e no geral não muito bom.

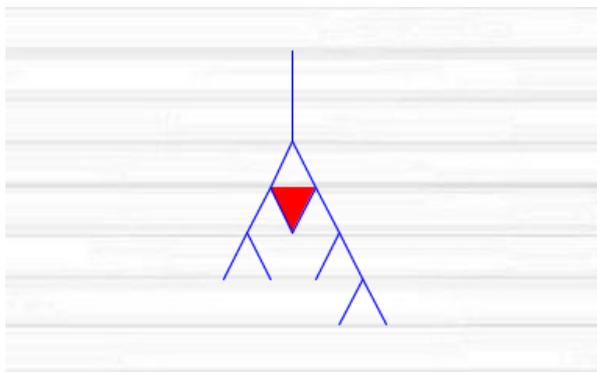


Talvez alteres as regras lentamente, e contruas um arbusto ternário em que cada ramo origina três ramos.



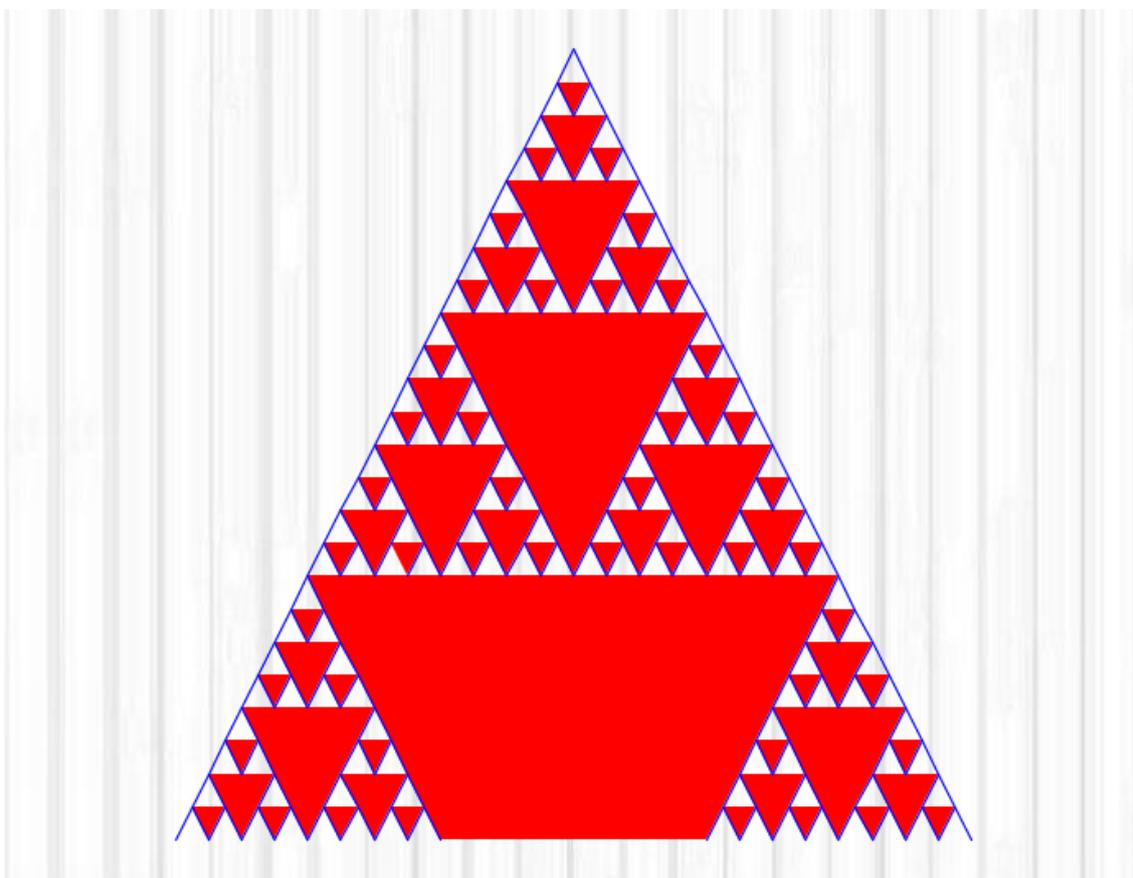
Mas, infelizmente, ainda só passaram 45 minutos desde o início da tua aula de matemática e vais precisar de mais jogos de rabiscos interessantes.

Voltemos ao jogo em que cada linha se divide em duas em cada nível, mas agora começamos o jogo no início da folha. E, em vez de as linhas serem esmagadas contra as linhas do caderno, algumas batem umas nas outras. E quando isso acontece, há uma explosão e as linhas terminam aí.



Talvez vires o teu caderno e o mantenhás numa posição horizontal para garantires mais espaço.

Talvez voltes à mitologia grega: Hércules tem um método em que, em vez de queimar os pescoços das hidras para evitar que eles voltem a crescer, ele descobriu que os pescoços se mantem juntos se se aproximarem demasiado, e, em vez de crescerem novas cabeças, elas enchem-se de sangue.

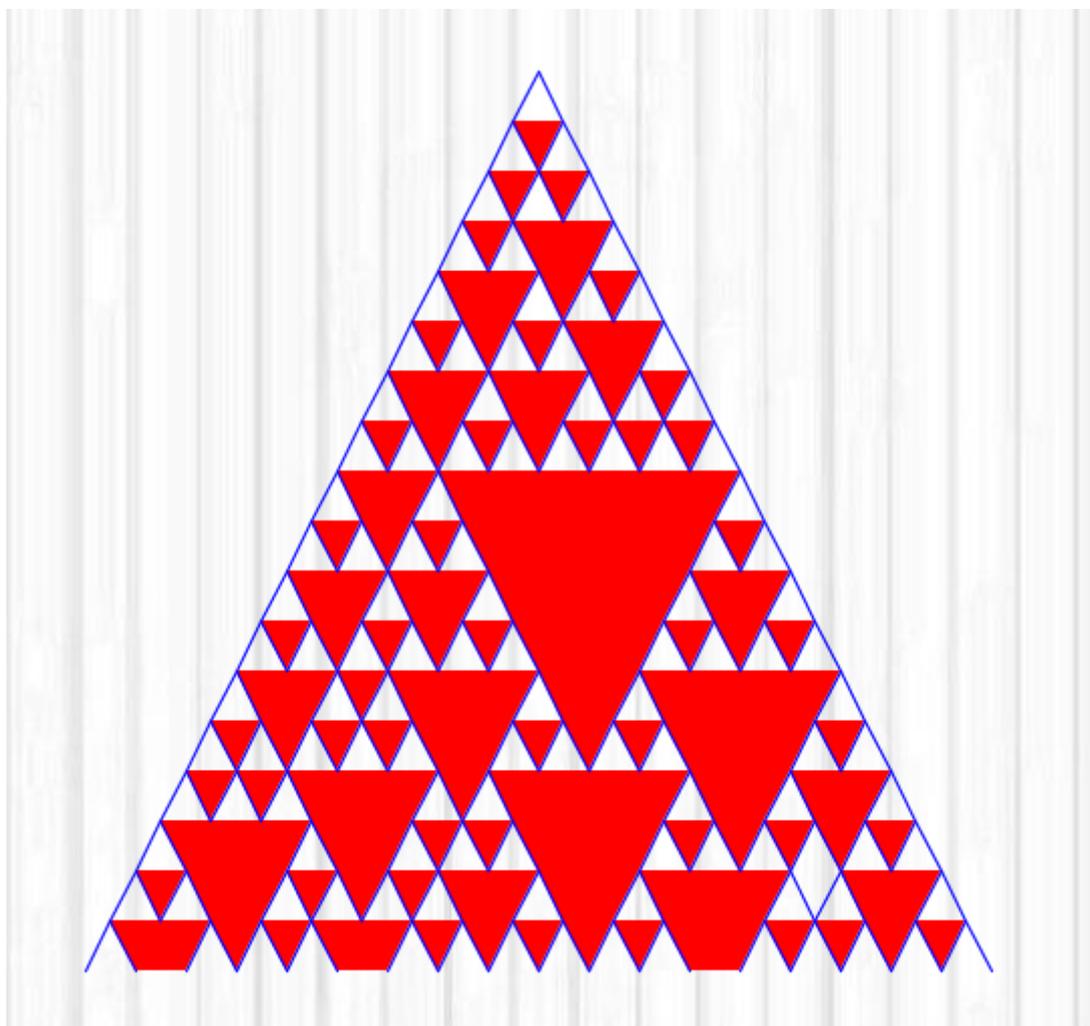


Pode parecer um pouco mórbido para uma aula de matemática mas se o currículo não fosse tão apavorante e os métodos de ensino não fossem tão atrozes, talvez não precisasses de te distrair com estas histórias e jogos.

Por falar em jogos, algo muito interessante se verifica. Parece que as tuas simples regras de dividir e colidir estão a criar um triângulo de Sierpinski, que é um fractal impressionante. Mas a questão não é aprender sobre factais ou Sierpinski, mas mostrar que jogos simples de riscos e rabiscos podem levar-nos a resultados da matemática tão interessantes e bonitos conhecidos. Pelo menos, conhecidos para pessoas como eu.

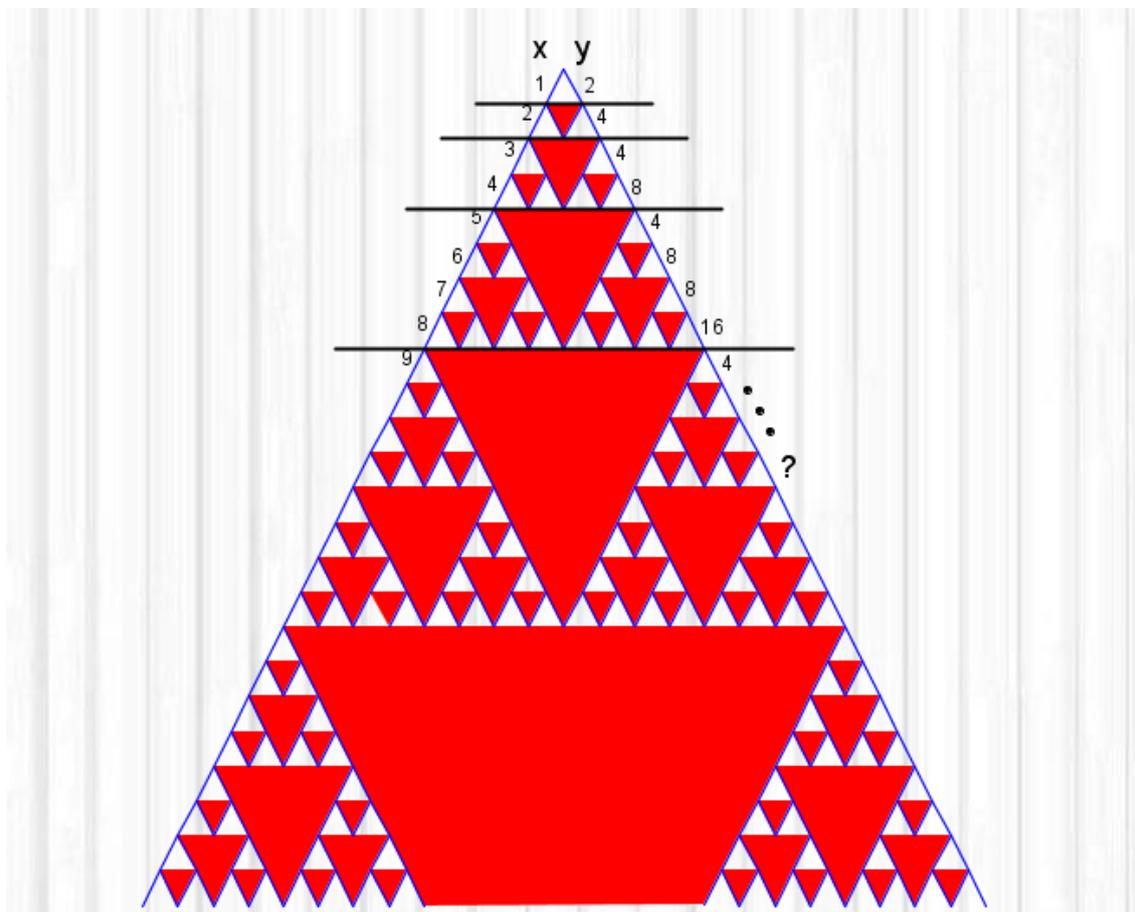
E se tu és bom a inventar jogos de rabiscos, então podes até acabar por fazer verdadeira matemática durante as tuas aulas de matemática.

Adiante. Talvez tentes o jogo outra vez e te enganes e acidentalmente crescem cabeças onde não era suposto mas tu continuas.



Agora introduziste um elemento de erro aleatório e tu queres saber como este erro vai afectar a figura final. Ainda parece um impressionante rabisco e mantem vários elementos mas a estrutura é diferente da do triângulo de Sierpinski.

Falando em estrutura, talvez, por estares mesmo muito aborrecido e parecer que a tua aula nunca vai realmente terminar, tentas determinar o número de pescoços em cada nível e tentas encontrar o padrão.



Talvez não tenhas esquecido as potências de 2.

De qualquer forma, espero ter-te dado algo divertido para fazer a próxima vez que estiveres aborrecido.

Boa sorte com as aulas de matemática.

Conclusão

Apesar da dificuldade inicial agravada não só pela liberdade de escolha do tema a desenvolver como também pelo factor surpresa em relação ao resultado final, o que acabou por criar alguma desmotivação, considero que o resultado final acabou por ser bastante surpreendente e interessante.

Este trabalho vem confirmar a ideia do mundo imenso que é a internet e os benefícios da mesma em prol do ensino. Existem imensos materiais que podem ser utilizados em sala de aula ou que podem ser aproveitados na realização de actividades. Uma partilha que facilita o trabalho dos professores (salvo algumas situações nomeadamente no caso de dificuldades em línguas estrangeiras!).

É importante que haja uma preocupação constante relativamente à sala de aula no sentido de adequar o mais possível as estratégias e/ou metodologias na sala de aula que cativem os alunos e lhes permitam um olhar mais positivo para as diferentes disciplinas e seus conteúdos. Não sendo possível dissociar os alunos dos diferentes aspectos que o constituem, nomeadamente a vertente social, não podemos perder de vista os objetivos passíveis de serem atingidos.

Apesar dos currículos estabelecidos e dos objetivos definidos, parece-me, de facto, importante relacionar os conteúdos, tanto quanto possível, com jogos e histórias. Em relação às histórias, podem ser criadas pelos próprios alunos mas podem ser histórias utilizadas nas actividades a realizar em sala de aula que permitam aos alunos relacionar conceitos. *Rabiscos na aula de Matemática* é um bom exemplo em que é possível verificar a relação entre diferentes áreas da matemática favorecendo o conhecimento em resultados matemáticos bastante interessantes que ou não constam nos programas ou são transmitidos aos alunos de forma a que esse interesse não seja realçado. No primeiro caso, trata-se de uma oportunidade para promover o conhecimento; no segundo caso, trata-se de um ponto a ter presente nas planificações das aulas para que seja contrariada esta tendência de *desinteressar o interessante*.

O contar das histórias permite também desenvolver conhecimentos noutras áreas além de que há um favorecimento na relação interdisciplinar. Mais uma vez, *Rabiscos na aula de Matemática* traduz bem essa interdisciplinaridade quando refere a mitologia grega.

Os jogos favorecem a compreensão dos conteúdos uma vez que, para se jogar e poder definir estratégias, há necessidade de conhecer bem as regras dos jogos. Um ponto para os jogos!

A construção das imagens no *Cinderella*. Permitiu que conhecesse mais algumas das funcionalidades do programa. No entanto, tratando-se de figuras simples, a utilização deste software consistiu essencialmente na construção de pontos, segmentos e triângulos.

Este trabalho mostra uma perspectiva positiva acerca da matemática na sala de aula. Perante os cenários de dificuldades da matemática nas salas de aulas, entre partilhas de experiências de professores bem sucedidos, surgem também estes trabalhos para intensificar a luz ao fundo do túnel uma vez que mostra de que forma é possível

evidenciar a interdisciplinaridade nos trabalhos realizados em sala de aula com situações diferentes das clássicas referidas nos manuais.

Referências Bibliográficas

[//vihart.com/doodling/](http://vihart.com/doodling/)

www.apm.pt/apm/revista/educ67/Tecnologias.pdf

Hércules (mitologia). In **Infopédia** [Em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2011. [Consult. 2011-06-26].

Disponível na www: <URL: [http://www.infopedia.pt/\\$hercules-mitologia](http://www.infopedia.pt/$hercules-mitologia)>.

Os Doze Trabalhos de Hércules. In **Infopédia** [Em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2011. [Consult. 2011-06-26].

Disponível na www: <URL: [http://www.infopedia.pt/\\$os-doze-trabalhos-de-hercules](http://www.infopedia.pt/$os-doze-trabalhos-de-hercules)>.

www.fernandodannemann.recantodasletras.com.br/visualizar.php?id=648057

[//pt.wikipedia.org/wiki/Hidra_de_Lerna](http://pt.wikipedia.org/wiki/Hidra_de_Lerna)

[www.infopedia.pt/\\$hercules,2](http://www.infopedia.pt/$hercules,2)

Yolanda L., Francelino G.. *Xeq Mat 12*. Lisboa. Editorial o livro.

Cristina B., Marinela A., Ana C. M., (1999). *Mat 11*. Volume 2. Lisboa. Lisboa Editora.

[//pt.scribd.com/doc/20939623/Fractais-Conceitos-Basicos-Representacoes-Graficas-e-Aplicacoes-ao-Ensino-nao-Universitario](http://pt.scribd.com/doc/20939623/Fractais-Conceitos-Basicos-Representacoes-Graficas-e-Aplicacoes-ao-Ensino-nao-Universitario)

[//cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico1.php](http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico1.php)

[//cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico4.php](http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico4.php)

[//educacao.uol.com.br/fisica/metrologia--b-erro-sistematico-aleatorio-e-incerteza-total.jhtm](http://educacao.uol.com.br/fisica/metrologia--b-erro-sistematico-aleatorio-e-incerteza-total.jhtm)

[//fisicomaluco.com/experimentos/2008/05/31/teoria-de-erros-erros-grosseiros-aleatorios-e-acidentais/](http://fisicomaluco.com/experimentos/2008/05/31/teoria-de-erros-erros-grosseiros-aleatorios-e-acidentais/)