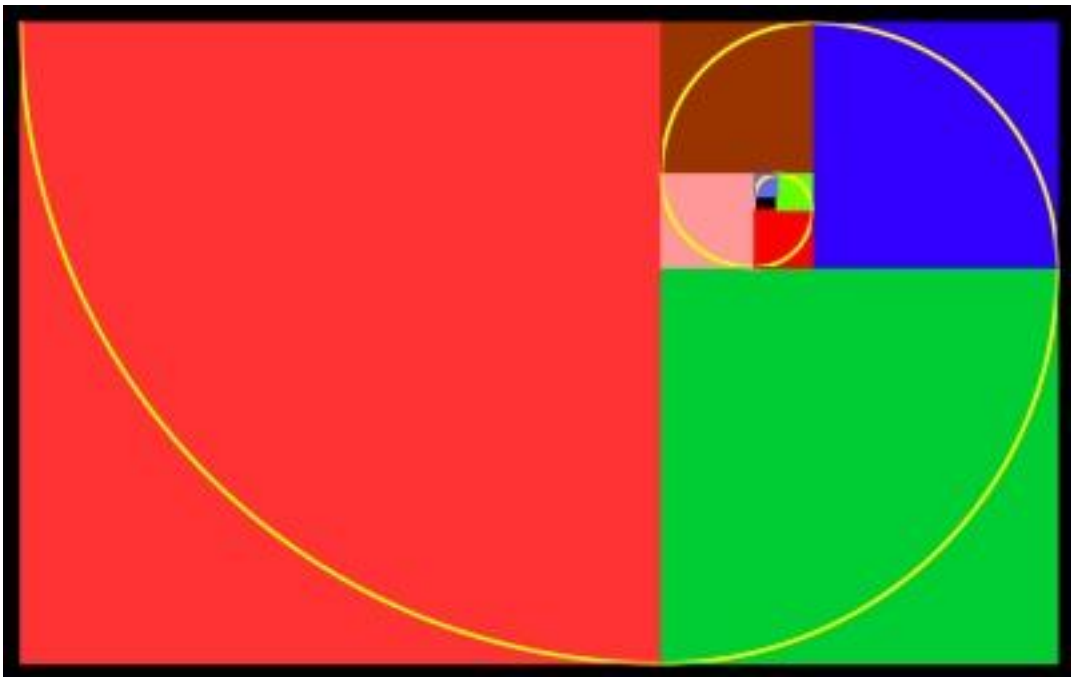
Proporcionalidade Directa e Inversa



Ensino da Matemática I

Mestrado no Ensino da Matemática do 3º Ciclo do Ensino Básico e do Secundário

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Helena Maria Raposo Oliveira Alonso Ribeiro

Proporcionalidade Directa

Antes de chegar à definição de proporcionalidade directa é necessário saber alguns conceitos.

1. **Razão** entre duas grandezas a e b é a relação que existe entre elas e representa-se por $\frac{a}{b}$ (razão de a para b). Os números a e b são termos da razão, a é o antecedente e b o consequente.

2. **Equivalência de razões:** obtém-se uma razão equivalente a uma razão dada, multiplicando ou dividindo ambos os termos da razão dada por um número diferente de zero.

   $\frac{3}{5}$ é equivalente a $\frac{6}{10}$ porque $\frac{3\ (*2)}{5\ (*2)} = \frac{6}{10}$

3. **Proporção** é uma igualdade entre duas razões.

   $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

   Propriedade fundamental das proporções: Em qualquer proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Na proporção $\frac{3}{5} \times \frac{6}{10}$

   - 3 e 10 são os extremos
   - 5 e 6 são os meios

   Então 3×10 = 5×6

4. **Aplicação**

   A Resolução de Problemas é uma das Capacidades Transversais no Ensino Básico. Consiste na capacidade que o aluno deve adquirir para resolver e formular problemas analisando diferentes estratégias. Esses problemas são matemáticos e também problemas relativos a contextos do seu dia-a-dia.

   No sentido de desenvolver esta capacidade nos alunos apresento o seguinte exercício.

   Exercício: A Matilde comprou 6kg de arroz por 8,4€. Quanto gastaria a Matilde se tivesse comprado 11kg de arroz?

   Resolução:

   1º Método: Proporção

   $$\frac{6}{8{,}4} = \frac{11}{x} <=> x = \frac{11 \times 8{,}4}{6} <=> x = 15{,}4$$

   R: A Matilde gastaria 15,4€

   2º Método: Redução à unidade

   Custo de 1 kg: 8,4:6 = 1,4

   1kg de arroz custa 1,4 euros, então 11kg de arroz custam 11×1,4 = 15,4

R: A Matilde gastaria 15,4€

3º Método: Regra de três simples

Número de kg	Custo em €
6	8,4
11	x

$$\frac{6}{11} = \frac{8,4}{x} <=> x = \frac{11 \times 8,4}{6} <=> x = 15,4$$

R: A Matilde gastaria 15,4€

5. **Percentagem** traduz a comparação entre a parte e o todo (100). É uma razão de consequente 100. Usa-se o símbolo % para representar uma percentagem.

   52% de *pizza* é massa, isto é, em cada 100g de *pizza* 52g é massa.

Depois da introdução destes conceitos já podemos estudar a proporcionalidade directa.

Uma grandeza x é **directamente proporcional** a uma grandeza y se existir um número c, diferente de zero, de modo que:

$$x = c.y$$

Ao número c chama-se constante de proporcionalidade.

Existe uma relação de **Proporcionalidade directa** entre as grandezas x e y

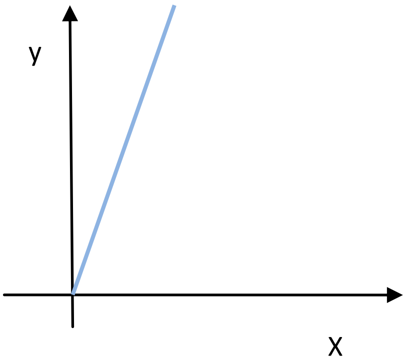
Nota: Se x é directamente proporcional a y, então também y é directamente proporcional a x.

Quando existe proporcionalidade directa entre duas grandezas, o gráfico que une os pontos correspondentes é uma recta que contém a origem do referencial.

Exemplo:

$$\begin{cases} y = 2.x \\ k = 2 \end{cases}$$

x	**2**	**5**	**1,5**	**3**
y	4	10	3	6



O Raciocínio Matemático é outra das Capacidades Transversais que envolve a formulação e tese de conjecturas e a construção de cadeias argumentativas começando pelas simples justificações até às argumentações mais complexas.

No sentido de desenvolver esta capacidade nos alunos apresento o seguinte exercício.

Aplicação: Existe relação de proporcionalidade directa entre a medida do perímetro de um círculo e a medida do seu raio?

Resolução: Seja P a medida do perímetro de um círculo e r a medida do seu raio.

Sabemos que P = 2.π.r

2.π é uma constante diferente de zero, então 2.π = c (constante), Logo

P = c.r

Pela definição de proporcionalidade directa, P e r são directamente proporcionais e 2.π é a constante de proporcionalidade.

R: Existe relação de proporcionalidade directa entre a medida do perímetro de um círculo e a medida do seu raio.

Proporcionalidade Inversa

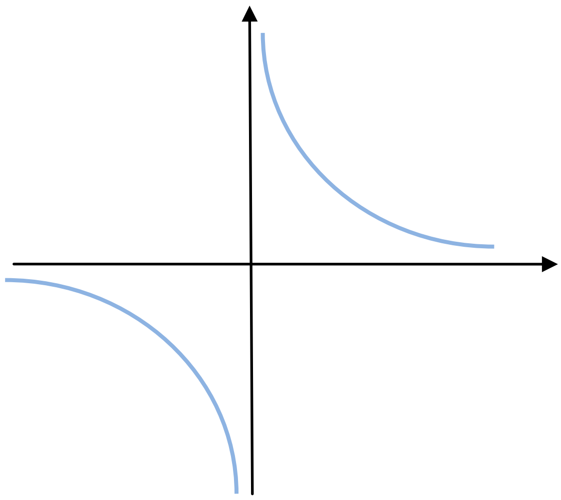
Duas variáveis x e y são **inversamente proporcionais**, se o produto entre elas for uma constante não nula.

$$x.y = k \ <=> y = \frac{k}{x}$$

A função do tipo $x \mapsto y = \frac{k}{x}$, com k constante não nula e $x \neq 0$, é uma função de proporcionalidade inversa. O número k é a constante de proporcionalidade.

Exemplo:

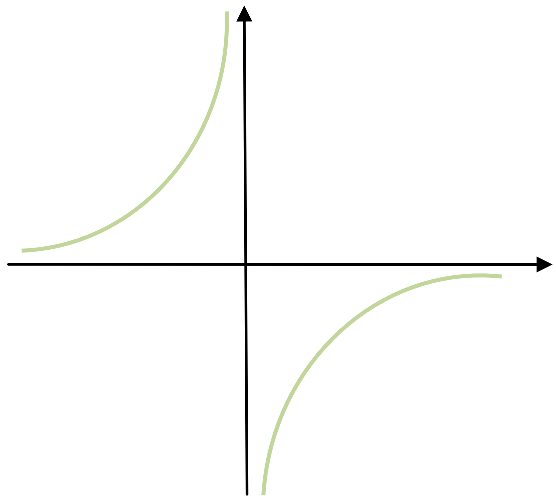
k>0



X	1	2	0,5	-1	-3
y	1	1/2	2	-1	-1/3

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ k = 1 \end{cases}$$

k<0.



X	1	2	0,5	-1	-3
y	-1	-1/2	-2	1	1/3

$$\begin{cases} y = \frac{-1}{x} \\ k = -1 \end{cases}$$

O gráfico de uma função de proporcionalidade inversa está sobre uma linha curva, dividida em dois ramos, a que se chama hipérbole.

As curvas aproximam-se cada vez mais dos eixos, conforme k se aproxima do zero, mas nunca lhe chega a tocar.

A Comunicação Matemática é a terceira Capacidade Transversal e envolve as vertentes oral e escrita em que o aluno deve ser capaz de expressar as suas ideias mas também interpretar e compreender as ideias que lhe são apresentadas.

No sentido de desenvolver esta capacidade nos alunos apresento o seguinte exercício.

Aplicação: Na tabela seguinte estão representados valores da variável x e da variável y.

x	1	2	3	4	
y	12		5		50

Será que existe alguma regularidade que permita afirmar que x e y são inversamente proporcionais e completar a tabela? Resolve e discute com os teus colegas.

Resolução: Na tabela encontram-se dois pares de valores correspondentes. Quando x aumenta, y diminui.

Então será que existe uma relação de proporcionalidade inversa?

$$x = \frac{k}{y} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{k}{12} \\ 3 = \dfrac{k}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 12 \times 1 \\ k = 5 \times 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 12 \\ k = 15 \end{cases} \rangle\ 12 \neq 1$$

Não. Para haver uma relação de proporcionalidade inversa é necessário que o produto dos valores x e y correspondentes seja sempre o mesmo, isto é, a constante de proporcionalidade ser a mesma. Nesta tabela isso não acontece.

Não é suficiente que quando uma quantidade aumente e outra diminua que haja uma relação de proporcionalidade inversa entre elas.

Aplicação: Toma para unidade a área de uma folha de papel A4. Dobra ao meio a folha de papel sucessivamente formando rectângulos cada vez menores. Existe proporcionalidade entre o número de dobragens e a área de cada um dos rectângulos obtidos? Resolve o problema usando as fases de resolução de Polya.

Resolução:

1º Leitura e compreensão do problema

2º Estabelecer um plano de resolução – Construir uma tabela com duas variáveis, o número de dobragens e a área do rectângulo obtido. Relacionar as duas variáveis averiguando se há proporcionalidade directa, inversa ou nenhuma.

3º Execução do plano:

Nº de dobragens	1	2	3	4
Largura	148,5	105,00	74,250	52,5000
Comprimento	210,0	148,50	105,00	74,2500
Área rectângulo	31185	15592,5	7796,25	3898,125

*A unidade é o mm.

ou

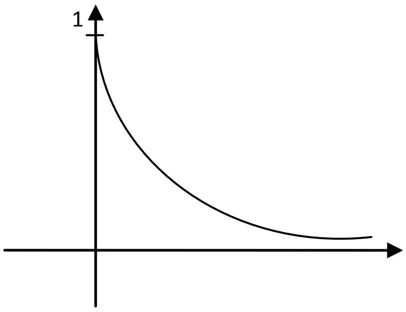
Nº de dobragens	1	2	3	4
Área do rectângulo	1/2	1/4	1/8	1/16

Não existe proporcionalidade directa porque quando o número de dobragens aumenta, a área dos rectângulos diminui. Não existe também proporcionalidade inversa porque

$$\frac{1}{2}.1 \neq \frac{1}{4}.2 \neq \frac{1}{8}.3 \neq \frac{1}{16}.4$$

Não é constante o produto dos números de dobragens com as áreas dos rectângulos correspondentes.

4º Reflectir sobre o trabalho realizado: Quando uma variável aumenta e a outra diminui, nem sempre existe proporcionalidade inversa. Só há quando o produto dos valores correspondentes for igual (constante de proporcionalidade). O gráfico seguinte corresponde à tabela do exercício.



Pelo gráfico podemos também concluir que não há proporcionalidade inversa, pois intersecta o eixo dos y.

No fim deste capítulo deves ser capaz de:

- Analisar situações de proporcionalidade directa e inversa como funções do tipo

$y = k.x$ e $y = \frac{k}{x}$

- Representar algebricamente situações de proporcionalidade directa e inversa

- Analisar gráficos que traduzam casos de proporcionalidade directa e inversa em contextos da vida real

Bibliografia:

Luísa Faria, Alexandre Azevedo, 2002. Matemática Dinâmica, Matemática 7º ano. Porto Editora

Maria Conceição, Matilde Almeida, 2006. Matematicamente falando 7. Areal Editores

Maria Augusta Neves, Maria Luísa Faria, 2002. Matemática 9º ano. Porto Editora

Domingos Fernandes, Isabel Vale, Jaime Silva, Lina Fonseca, Teresa Pimentel, 2002. Matemática 9º ano. Areal Editores

Programa de Matemática do Ensino Básico, 2009. Dgidc, Direcção Geral de Investigação e Desenvolvimento Curricular. Ministério da Educação.